ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 8.07.2019

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Sia

$$f(x) = e^{\frac{2}{|2+\log x|}}.$$

a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e studiare la prolungabilità per continuità di f in $x = 0$;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento (a) Essendo il dominio di e^x tutto $\mathbb{R}$, ed il dominio di $\log x$ tutti gli $x > 0$, il dominio di f è determinato dalle due condizioni:

$$x > 0, \quad 2 + \log x \neq 0.$$

La seconda relazione equivale a $x \neq e^{-2}$, quindi

$$D = \{x > 0 : x \neq e^{-2}\}.$$

Con tre cambi di variabile si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{y\to -\infty} e^{\frac{2}{|2+y|}} = \lim_{s\to+\infty} e^{\frac{2}{s}} = \lim_{t\to 0^+} e^t = 1.$$

Dunque f può essere estesa per continuità in 0 ponendo $f(0) = 1$.

Inoltre

$$\lim_{x\to e^{-2}} f(x) = \lim_{y\to 0^+} e^{\frac{2}{y}} = \lim_{s\to+\infty} e^s = +\infty.$$

Dunque f non può essere estesa per continuità in e^{-2}.

Infine

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} e^{\frac{2}{|2+y|}} = \lim_{s\to+\infty} e^{\frac{2}{s}} = \lim_{t\to 0^+} e^t = 1.$$

(b) La funzione è derivabile in tutto il suo dominio, essendo composizione di funzioni derivabili (la funzione $|\cdot|$ non è derivabile solo in 0, ma $2 + \log x$ si annulla solo in e^{-2}, che non appartiene al dominio.) La derivata, calcolata con la regola della catena è:

$$f'(x) = e^{\frac{2}{|2+\log x|}} \left(-\frac{2}{|2+\log x|^2}\right) \frac{2+\log x}{|2+\log x|} \frac{1}{x} = -\frac{2e^{\frac{2}{|2+\log x|}}}{x|2+\log x|^3}(2+\log x).$$

Si noti che la frazione del membro destro è sempre positiva nel dominio D, da cui:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 + \log x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^{-2},$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2 + \log x > 0 \Leftrightarrow x > e^{-2},$$

ed $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in D$. In particolar modo f non ha punti critici.

Il grafico di f è in figura 1.

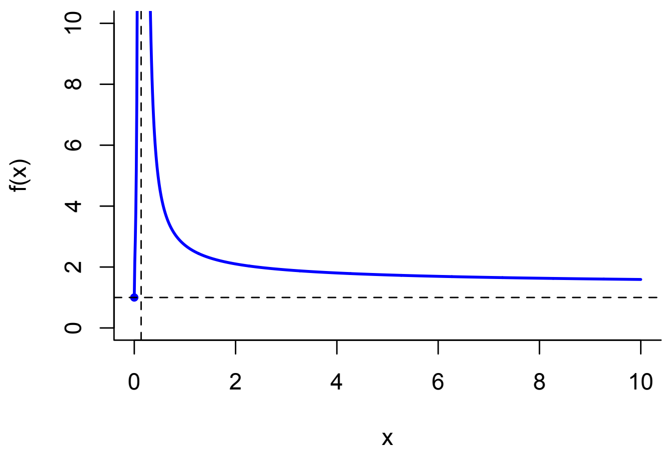

Figure 1: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 [4 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{1 - 2\sqrt{n}}.$$

Svolgimento Per $n \to \infty$ abbiamo $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ e $1 - 2\sqrt{n} \sim -2\sqrt{n}$. Pertanto il termine generale della serie è asintotico a $\frac{-1}{2n^{\frac{3}{2}}}$. Poiché $\frac{3}{2} > 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

converge, e per il principio di convergenza asintotico, anche la prima serie converge.

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere l'equazione

$$\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{(\operatorname{Im} z)^2}{|iz^2|}$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Svolgimento Osserviamo che l'equazione è ben definita solo per $z \neq 0$. Pertanto, assumendo $z \neq 0$ possiamo semplificare moltiplicando a sinistra per $\frac{z}{z}$, ottenendo

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{|z|^2} = -\frac{(\operatorname{Im} z)^2}{|z|^2},$$

dove abbiamo anche usato che $|iz^2| = |z^2| = |z|^2$. Moltiplicando per $|z|^2$ otteniamo

$$z^2 = -(\operatorname{Im} z)^2.$$

Scrivendo $z = x + iy$ si ottiene $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, $-(\operatorname{Im} z)^2 = -y^2$, ed otteniamo dunque

$$x^2 - y^2 + 2ixy = -y^2. \tag{1}$$

Quest'equazione può essere soddisfatta solo se $2ixy = 0$. Questo implica $xy = 0$, ovvero $x = 0$ o $y = 0$ (non entrambi perché $z \neq 0$). Nel caso $x = 0$, $y \neq 0$, abbiamo una soluzione di (1). Nel caso $y = 0$ e $x \neq 0$ invece (1) non è soddisfatta. Quindi le soluzioni sono

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C} : x = 0, y \neq 0\},$$

ovvero l'asse immaginario privato dell'origine, come si può vedere in figura 2

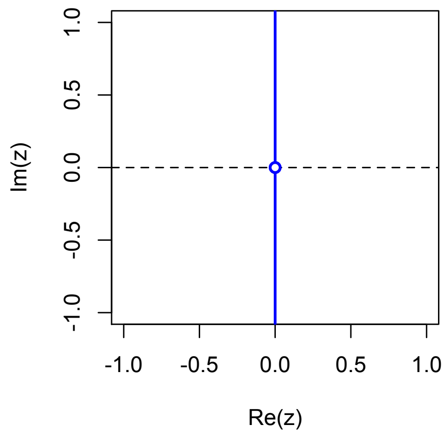

Figure 2: L'insieme delle soluzioni dell'esercizio 3 (Tema 1).

Esercizio 4 [5+3+4 punti] a) Si calcoli una primitiva della funzione

$$e^x \log(1 + 2e^x).$$

Per $\alpha \in \mathbb{R}$, si definisca poi $f_\alpha(x) = e^{\alpha x} \log(1 + 2e^x)$:
b) si studi la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
c) si calcoli lo sviluppo di Taylor di ordine 2 di centro $x_0 = 1$ della funzione

$$F(x) = \int_1^x f_0(t)\, dt.$$

Svolgimento a) Con la sostituzione $y = e^x$, $dy = e^x dx$ ed un'integrazione per parti si ottiene

$$\int e^x \log(1 + 2e^x) dx = \int \log(1 + 2y) dy = y \log(1 + 2y) - \int \frac{2y}{1 + 2y} dy.$$

Ora, per ridurre il numeratore dell'integrando a destra scriviamo

$$\frac{2y}{1 + 2y} = 1 - \frac{1}{1 + 2y},$$

Dunque
$$\int \frac{2y}{1+2y}dy = \int \left(1 - \frac{1}{1+2y}\right) dy = y - \frac{\log(1+2y)}{2} + c.$$
Aggiungendo ai termini precedenti e sostituendo $y = e^x$ si ottiene
$$\int e^x \log(1+2e^x)dx = e^x \log(1+2e^x) - e^x + \frac{\log(1+2e^x)}{2} + c.$$

b) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f_α è continua in $[0,+\infty)$, quindi per studiare la convergenza del suo integrale, studiamo il comportamento di f_α per $x \to \infty$. Per $\alpha \geq 0$ abbiamo che
$$\lim_{x\to\infty} f_\alpha(x) = +\infty,$$
per cui l'integrale $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ diverge.

Per $\alpha < 0$, abbiamo $f_\alpha(x) = o(x^{-2})$ per $x \to \infty$, e per il criterio del confronto asintotico, l'integrale converge.

c) Abbiamo
$$F(x) = F(1) + F'(1)(x-1) + \frac{F''(1)}{2}(x-1)^2 + o(|x-1|^2) \quad \text{per } x \to 1.$$
Abbiamo
$$F(1) = 0, \quad F'(1) = f_0(1) = \log(1+2e), \quad f_0'(x) = \frac{2e^x}{1+2e^x}, \quad f_0'(1) = \frac{2e}{1+2e},$$
quindi
$$F(x) = \log(1+2e)(x-1) + \frac{e}{1+2e}(x-1)^2 + o(|x-1|^2) \quad \text{per } x \to 1.$$

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il limite
$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \left(\sqrt[8]{x^2-2} - \sqrt[4]{x+1}\right)$$
al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento. Usiamo l'espansione $(1+y)^r = 1 + ry + o(y)$ per $y \to 0$ e scriviamo
$$\sqrt[8]{x^2-2} = (x^2-2)^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{1}{4}}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{1}{4}}\left(1 - \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right), , \quad \text{per } x \to \infty,$$
$$\sqrt[4]{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}}\left(1 - \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad \text{per } x \to \infty.$$
Sottraendo otteniamo
$$x^\alpha\left(\sqrt[8]{x^2-2} - \sqrt[4]{x+1}\right) = x^\alpha \cdot x^{\frac{1}{4}}\left(-\frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{x^{\alpha-\frac{3}{4}}}{4}(1+o(1)) \quad \text{per } x \to \infty.$$
Pertanto
$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha\left(\sqrt[8]{x^2-2} - \sqrt[4]{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^{\alpha-\frac{3}{4}}}{4}(1+o(1))\right) = \begin{cases} 0 & \text{per } \alpha < \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \text{per } \alpha = \frac{3}{4} \\ -\infty & \text{per } \alpha > \frac{3}{4}. \end{cases}$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 8.07.2019

TEMA 2

Esercizio 1 [6 punti] Sia

$$f(x) = e^{\frac{1}{|3+\log x|}}.$$

a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e studiare la prolungabilità per continuità di f in $x = 0$;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di f.

(a) Essendo il dominio di e^x tutto $\mathbb{R}$, ed il dominio di $\log x$ tutti gli $x > 0$, il dominio di f è determinato dalle due condizioni:

$$x > 0, \quad 3 + \log x \neq 0.$$

La seconda relazione equivale a $x \neq e^{-3}$, quindi

$$D = \{x > 0 : x \neq e^{-3}\}.$$

Con tre cambi di variabile si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{y\to -\infty} e^{\frac{2}{|3+y|}} = \lim_{s\to +\infty} e^{\frac{1}{s}} = \lim_{t\to 0^+} e^t = 1.$$

Dunque f può essere estesa per continuità in 0 ponendo $f(0) = 1$.

Inoltre

$$\lim_{x\to e^{-3}} f(x) = \lim_{y\to 0^+} e^{\frac{1}{y}} = \lim_{s\to +\infty} e^s = +\infty.$$

Dunque f non può essere estesa per continuità in e^{-3}.

Infine

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{y\to +\infty} e^{\frac{2}{|3+y|}} = \lim_{s\to +\infty} e^{\frac{1}{s}} = \lim_{t\to 0^+} e^t = 1.$$

(b) La funzione è derivabile in tutto il suo dominio, essendo composizione di funzioni derivabili (la funzione $|\cdot|$ non è derivabile solo in 0, ma $3 + \log x$ si annulla solo in e^{-3}, che non appartiene al dominio.) La derivata, calcolata con la regola della catena, è:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{|3+\log x|}} \left(-\frac{1}{|3+\log x|^2}\right) \frac{3+\log x}{|3+\log x|} \frac{1}{x} = -\frac{e^{\frac{1}{|3+\log x|}}}{x|3+\log x|^3}(3+\log x).$$

Si noti che la frazione del membro destro è sempre positiva nel dominio D, da cui:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3 + \log x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^{-3},$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3 + \log x > 0 \Leftrightarrow x > e^{-3},$$

ed $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in D$. In particolar modo f non ha punti critici.

Il grafico di f è in figura 3.

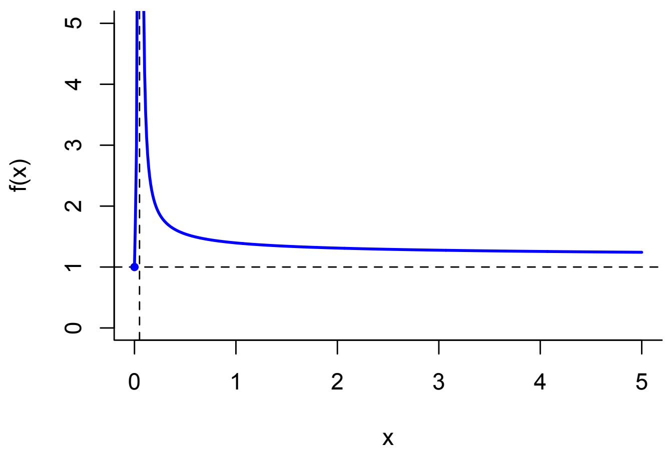

Figure 3: Il grafico di f (Tema 2).

Esercizio 2 [4 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\sqrt{n})\sinh\frac{1}{n^2}.$$

Svolgimento Per $n \to \infty$ abbiamo $\sinh\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ e $1-\sqrt{n} \sim -\sqrt{n}$. Pertanto il termine generale della serie è asintotico a $\frac{-1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Poiché $\frac{3}{2} > 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

converge, e per il principio di convergenza asintotico, anche la prima serie converge.

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere l'equazione

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{(\mathrm{Re}\,z)^2}{|iz^2|}$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Svolgimento Osserviamo che l'equazione è ben definita solo per $z \neq 0$. Pertanto, assumendo $z \neq 0$ possiamo semplificare moltiplicando a sinistra per $\frac{z}{z}$, ottenendo

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{|z|^2} = \frac{(\mathrm{Re}\,z)^2}{|z|^2},$$

dove abbiamo anche usato che $|iz^2| = |z^2| = |z|^2$. Moltiplicando per $|z|^2$ otteniamo

$$z^2 = (\mathrm{Re}\,z)^2.$$

Scrivendo $z = x + iy$ si ottiene $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ e quindi $(\mathrm{Re} z)^2 = x^2$; otteniamo dunque

$$x^2 - y^2 + 2ixy = x^2. \tag{2}$$

Quest'equazione può essere soddisfatta se e solo se $y^2 = 0$ e $2ixy = 0$. Quest'ultima implica $xy = 0$, cioè $x = 0$ o $y = 0$ (non entrambi perché $z \neq 0$). Nel caso $x \neq 0$, $y = 0$, abbiamo una soluzione di (2). Nel caso $y \neq 0$ e $x = 0$ invece (2) non è soddisfatta. Quindi le soluzioni sono

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C} : y = 0, x \neq 0\},$$

ovvero l'asse reale privato dell'origine, come si può vedere in figura 4

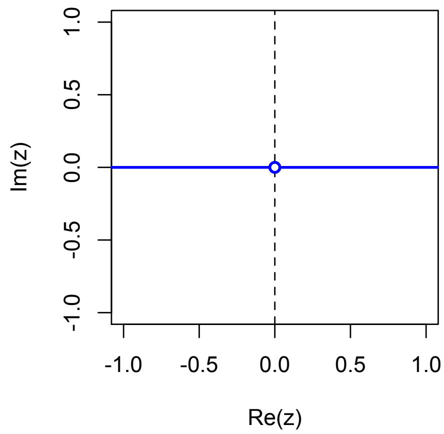

Figure 4: L'insieme delle soluzioni dell'esercizio 3 (Tema 2).

Esercizio 4 [5+3+4 punti] a) Si calcoli una primitiva della funzione

$$e^x \log(1 + 3e^x).$$

Per $\alpha \in \mathbb{R}$, si definisca poi $f_\alpha(x) = e^{\alpha x} \log(1 + 3e^x)$:
b) si studi la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
c) si calcoli lo sviluppo di Taylor di ordine 2 di centro $x_0 = 2$ della funzione

$$F(x) = \int_2^x f_0(t)\, dt.$$

Svolgimento a) Con la sostituzione $y = 3e^x$, $dy = 3e^x dx$ ed un'integrazione per parti si ottiene

$$\int e^x \log(1 + 3e^x) dx = \frac{1}{3} \int \log(1 + y) dy = \frac{y \log(1 + y)}{3} - \frac{1}{3} \int \frac{y}{1 + y} dy.$$

Ora, per ridurre il numeratore dell'integrando a destra scriviamo

$$\frac{y}{1 + y} = 1 - \frac{1}{1 + y},$$

Dunque
$$\int \frac{y}{1+y}dy = \int \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) dy = y - \log(1+y).$$
Aggiungendo ai termini precedenti e sostituendo $y = 3e^x$ si ottiene
$$\int e^x \log(1+3e^x)dx = e^x \log(1+3e^x) - e^x + \frac{\log(1+3e^x)}{3} + c.$$

b) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f_α è continua in $[0,+\infty)$, quindi per studiare la convergenza del suo integrale, studiamo il comportamento di f_α per $x \to \infty$. Per $\alpha \geq 0$ abbiamo che
$$\lim_{x\to\infty} f_\alpha(x) = +\infty,$$
per cui l'integrale $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ diverge.

Per $\alpha < 0$, abbiamo $f_\alpha(x) = o(x^{-2})$ per $x \to \infty$, e per il criterio del confronto asintotico, l'integrale converge.

c) Abbiamo
$$F(x) = F(2) + F'(2)(x-2) + \frac{F''(2)}{2}(x-2)^2 + o(|x-2|^2) \quad \text{per } x \to 2.$$
Abbiamo
$$F(2) = 0, \quad F'(2) = f_0(2) = \log(1+3e^2), \quad f_0'(x) = \frac{3e^x}{1+3e^x}, \quad f_0'(2) = \frac{3e^2}{1+3e^2},$$
quindi
$$F(x) = \log(1+3e^2)(x-2) + \frac{3e^2}{2(1+2e^2)}(x-2)^2 + o(|x-2|^2) \quad \text{per } x \to 2.$$

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il limite
$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[6]{x^2-1}\right)$$
al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento. Osserviamo che per $x \to +\infty$ si ha
$$x^\alpha \left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[6]{x^2-1}\right) = x^{\alpha+1/3} \left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} - \sqrt[6]{1-\frac{1}{x^2}}\right).$$
Usiamo ora l'espansione $(1+y)^r = 1 + ry + o(y)$ per $y \to 0$: per $x \to +\infty$ vale
$$\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} - \sqrt[6]{1-\frac{1}{x^2}} = \left[1 + \frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] - \left[1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = \frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$
Pertanto
$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[6]{x^2-1}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-2/3}\left(\frac{2}{3} + o(1)\right) = \begin{cases} 0 & \text{per } \alpha < \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \text{per } \alpha = \frac{2}{3} \\ \infty & \text{per } \alpha > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

NB: con log si indica il logaritmo in base e.