ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 17.09.2019

Soluzione Tema 1

Esercizio 1. Sia

$$f(x) = \log \left| e^{3x} - 2 \right|.$$

a) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e determinarne gli eventuali asintoti;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. a) Chiaramente $D = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |e^{3x} - 2| > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ e^{3x} - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\log 2}{3}\}$. Segno:

$$f(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |e^{3x} - 2| \geqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{3x} - 2 \leqslant -1 \ \text{ e } \ e^{3x} - 2 \geqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leqslant 0, \ \text{ e } \ x \geqslant \frac{\log 3}{3}.$$

Dove vale $=$ si hanno anche gli zeri di f. Limiti e asintoti: dobbiamo studiare la funzione per $x \longrightarrow \pm\infty, \frac{\log 2}{3}$. Facilmente, $f(-\infty) = \log 2$, quindi $y = \log 2$ è asintoto orizzontale a $-\infty$. A $+\infty$ facilmente $f(+\infty) = +\infty$. Cerchiamo un eventuale asintoto obliquo $y = mx + q$. Per m abbiamo che

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(e^{3x} - 2)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(e^{3x} \cdot 1_x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 0_x}{x} = 3.$$

Per q abbiamo

$$q = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\log(e^{3x} - 2) - \log e^{3x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \log \frac{e^{3x} - 2}{e^{3x}} = \log 1 = 0.$$

Conclusione: $y = 3x$ è asintoto obliquo a $+\infty$. Infine,

$$\lim_{x \to \frac{\log 2}{3}} \log |e^{3x} - 2| = \log 0+ = -\infty,$$

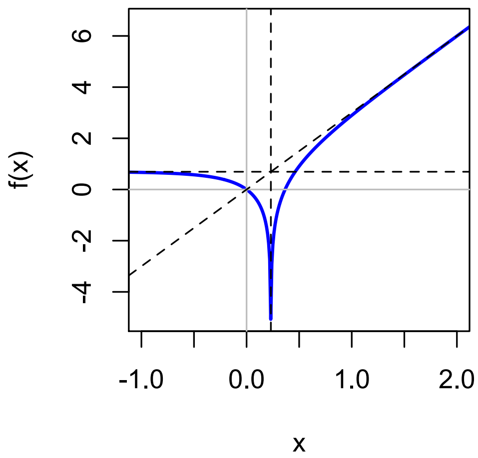
da cui $x = \frac{\log 2}{3}$ è asintoto verticale.
b) Chiaramente f è continua sul proprio dominio essendo composizione di funzioni continue ove definite. È anche derivabile poiché l'unico punto in cui non si può applicare la regola della catena è x t.c. $e^{3x} - 2 = 0$, cioè $x = \frac{\log 2}{3}$, che però non appartiene al dominio di f. La derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{|e^{3x} - 2|} \operatorname{sgn}(e^{3x} - 2) \cdot 3e^{3x} = \frac{3e^{3x}}{e^{3x} - 2}.$$

Da questa segue che

$$f'(x) \geqslant 0, \quad \Longleftrightarrow \quad e^{3x} - 2 > 0, \quad \Longleftrightarrow \quad x > \frac{\log 2}{3}.$$

Si conclude che $f \searrow$ su $]-\infty, \frac{\log 2}{3}[$ mentre $f \nearrow$ su $]\frac{\log 2}{3}, +\infty[$. Non ci sono, di conseguenza né minimi né massimi (di qualsiasi natura).
c) Grafico.



Esercizio 2. Si calcoli il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x-2x^2}-1-x}{\sinh x^2 + x^{7/3}\log x}.$$

Svolgimento. Ricordato che $\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log x = 0$, si vede facilmente che il limite si presenta come una forma del tipo 0/0. Studiamo l'ordine di infinitesimo di numeratore e denominatore. Ricordato che

$$e^t = 1 + t + o(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

abbiamo
$$N = 1 + (x - 2x^2) + o(x - x^2) - 1 - x = -2x^2 + o(x) = o(x),$$

insufficiente per un comportamento preciso,

$$N = 1 + (x - 2x^2) + \frac{(x-2x^2)^2}{2} + o((x-2x^2)^2) - 1 - x = -2x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{3}{2}x^2 \text{ per } x \to 0^+.$$

Per il denominatore è sufficiente ricordare che $\sinh t = t + o(t)$ per cui

$$D = x^2 + o(x^2) + x^{7/3}\log x = x^2 + o(x^2) \;\text{ per } x \to 0^+,$$

essendo $x^{7/3}\log x = o(x^2)$ poiché $\frac{x^{7/3}\log x}{x^2} = x^{1/3}\log x \longrightarrow 0$ per $x \longrightarrow 0+$. Dunque

$$\frac{N}{D} \sim \frac{-\frac{3}{2}x^2}{x^2} \longrightarrow -\frac{3}{2}.$$

Esercizio 3. Risolvere la disequazione
$$\operatorname{Re} z \le \operatorname{Re}\left(\frac{3}{z}\right)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano complesso.

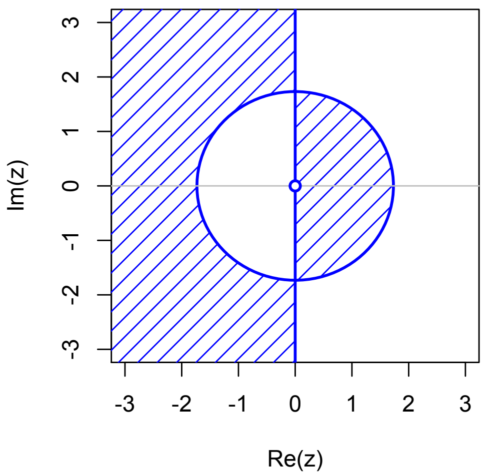
Svolgimento. Sia $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Allora $\operatorname{Re} z = x$ mentre essendo $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$,

$$\operatorname{Re} \frac{3}{z} = \frac{3x}{x^2 + y^2}.$$

Pertanto, $z \neq 0$ verifica la disequazione se e solo se

$$x \leqslant \frac{3x}{x^2 + y^2} \iff \begin{cases} x > 0, \quad 1 \leqslant \frac{3}{x^2+y^2}, \quad \iff \quad x^2 + y^2 \leq 3, \\ \\ x = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, \\ \\ x < 0, \quad 1 \geqslant \frac{3}{x^2+y^2}, \quad \iff \quad x^2 + y^2 \geq 3. \end{cases}$$

Figura:



Esercizio 4. a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left(\tan \frac{x}{2} \right)^3 dx \qquad \text{(sugg.: eseguire la sostituzione } \tan \frac{x}{2} = u\text{)}.$$

b) studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan x}{x^{\alpha+2}} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. a) Seguendo il suggerimento $u = \tan x/2$, $x = 2\arctan u$ da cui $dx = \frac{2}{1+u^2}$, pertanto

$$\begin{aligned}\int \left(\tan \tfrac{x}{2}\right)^3 \, dx \;&= \int \tfrac{2u^3}{1+u^2}\, du = 2\int \tfrac{u(u^2+1-1)}{1+u^2}\, du = \int 2u - \tfrac{2u}{1+u^2}\, du = u^2 - \log(1+u^2)\\ &= \left(\tan \tfrac{x}{2}\right)^2 - \log\left(1 + \left(\tan\tfrac{x}{2}\right)^2\right).\end{aligned}$$

b) Sia $f(x) = \frac{\tan x}{x^{\alpha+2}}$. Certamente $f \in C(]0, \frac{\pi}{6}])$ per ogni α ed è continua anche in $x = 0$ (quindi integrabile sicuramente) per $\alpha + 2 \leqslant 0$, cioè per $\alpha \leqslant -2$. Per $\alpha > -2$ abbiamo un integrale generalizzato in $x = 0$. Ricordato che $\tan x = x + o(x) = x 1_x$ per $x \longrightarrow 0$,

$$f(x) \sim \frac{x}{x^{\alpha+2}} = \frac{1}{x^{\alpha+1}} \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}} \quad \text{per } x \to 0^+,$$

integrabile in 0 se e solo se $\alpha + 1 < 1$, cioè $\alpha < 0$ per confronto asintotico. Morale: l'integrale generalizzato esiste finito se e solo se $\alpha < 0$.

Esercizio 5. (i) Si dimostri che la successione

$$a_n = \log(n+1) - \log\sqrt{n^2 + \alpha n + 4}$$

è infinitesima per $n \to \infty$ (per ogni α) e per $\alpha = 2$ se ne calcoli l'ordine;
(ii) si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. i) Osserviamo che

$$a_n = \log\frac{n+1}{\sqrt{n^2+\alpha n+4}} \sim \log\frac{n}{n} \longrightarrow 0.$$

Per avere l'ordine di infinitesimo occorre essere più precisi. Notiamo che, fattorizzando n e usando le proprietà dei logaritmi

$$a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{4}{n^2}\right).$$

Ricordato che $\log(1+t) = t + o(t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$,

$$\begin{aligned} a_n \;&= \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\alpha}{n} + \tfrac{4}{n^2} - \frac{\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{4}{n^2}\right)^2}{2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \tfrac{2-\alpha}{2n} - \tfrac{5-\alpha^2}{2n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

In particolare, se $\alpha = 2$ si ottiene $a_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.
ii) Per quanto visto al punto i),

$$a_n \sim \begin{cases} \frac{2-\alpha}{2n} \equiv \frac{C}{n}, & \alpha \neq 2,\\[2ex] -\frac{1}{2n^2} \equiv \frac{C}{n^2}, & \alpha = 2,\end{cases}$$

da cui si conclude che $\sum_n a_n$ converge se e solo se $\alpha = 2$ in virtù del criterio del confronto asintotico.

Esercizio 1 Sia
$$f(x) = \log\left|e^{2x} - 3\right|.$$

a) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e determinarne gli eventuali asintoti;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di f.

SOLUZIONE.

Dominio:
$\log\left|e^{2x} - 3\right|$ è ben definita $\iff$ $\left|e^{2x} - 3\right| > 0 \iff e^{2x} - 3 \neq 0 \iff x \neq \frac{\log 3}{2}$,
perciò il dominio è $D := \mathbb{R}\backslash\{\frac{\log 3}{2}\}$

Segno:
$x \in D$ e $f(x) \geq 0 \iff x \in D$ e $\left|e^{2x} - 3\right| \geq 1 \iff x \in D$ e $e^{2x} \geq 4$ o $e^{2x} \leq 2$.
$\iff x \geq \frac{\log 4}{2} = \log 2$ o $x \leq \frac{\log 2}{2}$.
Inoltre $f(x) = 0 \iff x \in \{\frac{\log 2}{2}, \log 2\}$.

Limiti:
I punti di accumulazione del dominio D sono $+\infty, -\infty, \frac{\log 3}{2}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left|e^{2x} - 3\right| \underset{y=e^{2x}-3}{=} \lim_{y\to+\infty} \log y = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \log\left|e^{2x} - 3\right| \underset{y=e^{2x}-3}{=} \lim_{y\to3} \log y = \log 3$$
$$\lim_{x\to\frac{\log 3}{2}+} \log\left|e^{2x} - 3\right| \underset{y=e^{2x}-3}{=} \lim_{y\to0+} \log y = -\infty$$
$$\lim_{x\to\frac{\log 3}{2}-} \log\left|e^{2x} - 3\right| \underset{y=e^{2x}-3}{=} = \lim_{y\to0+} \log y = -\infty$$

Asintoti
Dal calcolo dei limiti si deduce che la funzione f ha $y = \log 3$ come asintoto orizzontale a $-\infty$, e $x = \frac{\log 3}{2}$ come asintoto verticale sia per $x \to \frac{\log 3}{2}-$ sia per $x \to \frac{\log 3}{2}+$. Infine, da

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \log\left|e^{2x} - 3\right| = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \log(e^{2x} - 3) \underset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 3} = 2$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \log(e^{2x} - 3) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \log(e^{2x} - 3) - \log(e^{2x}) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{e^{2x} - 3}{e^{2x}}\right) = 0$$

deduciamo che la retta di equazione $y = 2x$ è asintoto obliquo a $+\infty$.

Derivabilità.
La funzione è derivabile in ogni punto del dominio. Infatti, gli unici punti in cui la funzione potrebbe non essere derivabile sono quelli in cui $\left|e^{2x} - 3\right| = 0$, vale a dire il solo punto $x = \frac{\log 3}{2}$, in quanto la funzione "modulo" non è derivabile nello zero. Tuttavia $x = \frac{\log 3}{2}$ non appartiene al dominio.

Calcoliamo la derivata:
Per $x \in \left]\log\left(\frac{\log 3}{2}\right), +\infty\right[$ si ha $f(x) = \log(e^{2x} - 3)$, cosicché $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x} - 3}$.

Per $x \in \left]-\infty, \log\left(\frac{\log 3}{2}\right)\right[$ si ha $f(x) = \log(-e^{2x}+3)$, cosicché, ancora, $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}-3}$. In conclusione

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-3} \quad \forall x \in D.$$

(oppure, ricordandosi che $\frac{d(\log|y|)}{dy} = \frac{1}{y}$ per ogni $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, si ha $f'(x) = \frac{1}{e^{2x}-3}(e^{2x}-3)' = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-3}$.

Monotonia.

Studiamo il segno della derivata:

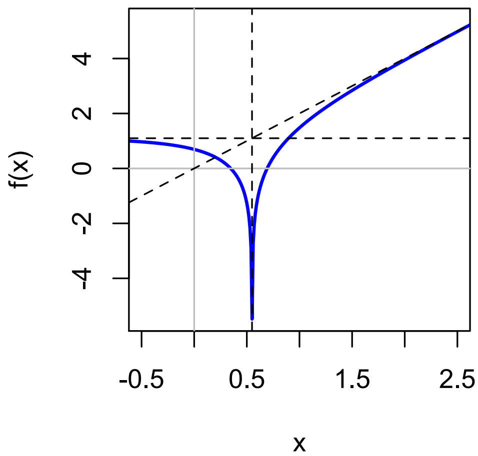
$$x \in D \quad \text{and} \quad f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-3} > 0 \iff x > \frac{\log 3}{2}$$

e

$$x \in D \quad \text{and} \quad f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-3} < 0 \iff x < \frac{\log 3}{2}).$$

Perciò f è strettamente crescente per $x \in]\frac{\log 3}{2}, +\infty[$ e strettamente decrescente per $x \in]-\infty, \frac{\log 3}{2}[$. Ne consegue, in particolare, che non ci sono punti di estremo.

Grafico.



Esercizio 2 Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x-3x^2}-1-x}{\sin x^2 + x^{5/2}\log x}.$$

SOLUZIONE.

Poichè

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^{5/2}\log x}{x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{x^{-1/2}} \underset{H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{-2}{x^{-5/2}} = 0,$$

si ha $x^{5/2}\log x = o(x^2)$, da cui

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x-3x^2}-1-x}{\sin x^2 + x^{5/2}\log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+(x-3x^2)+\frac{1}{2}(x-3x^2)^2+o(x^2)-1-x}{x^2+o(x^2)} \underset{PSI}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{5}{2}x^2}{x^2} = -\frac{5}{2}.$$

Esercizio 3 Risolvere la disequazione

$$\mathrm{Re}\, z \leq \mathrm{Re}\left(\frac{4}{z}\right)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano complesso.

SOLUZIONE.

Posto $z = x + iy$, si ha

$$\mathrm{Re}\, z = x, \quad \mathrm{Re}\left(\frac{4}{z}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{4x - 4iy}{x^2 + y^2}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{4x - 4iy}{x^2 + y^2}\right) = \frac{4x}{x^2 + y^2}.$$

Dunque

$$\mathrm{Re}\, z \leq \mathrm{Re}\left(\frac{4}{z}\right) \iff x \leq \frac{4x}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0) \iff$$

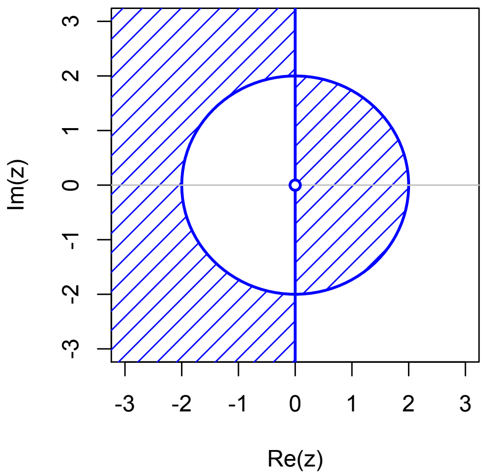
$$\left(x > 0 \ \text{ e } \ 1 \leq \frac{4}{x^2 + y^2}\right) \ \text{ o } \ \left(x < 0 \ \text{ e } \ 1 \geq \frac{4}{x^2 + y^2}\right) \ \text{ o}\left(x = 0 \ \text{ e } \ y \neq 0\right)$$

vale a dire se e solo se (x, y) appartiene all'insieme

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ x^2 + y^2 \leq 4, x > 0\right\} \bigcup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ x^2 + y^2 \geq 4, x < 0\right\} \bigcup \left\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\right\}$$

(L'intersezione del cerchio di raggio 2 con il semipiano $x > 0$ unito al semipiano $x < 0$ privato del cerchio di raggio 2 unito all'asse delle y privato dell'origine).

Figura:



Esercizio 4 a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int (\tan 2x)^3 \, dx \qquad \text{(sugg.: eseguire la sostituzione } \tan 2x = u\text{)}.$$

SOLUZIONE DI a).

Ponendo $\tan 2x = u$, si ha $x = \frac{1}{2} \arctan(u)$, da cui

$$\int (\tan 2x)^3 \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{u^3}{1 + u^2} du = \frac{1}{2} \int u du - \frac{1}{2} \int \frac{u}{1 + u^2} du = \frac{u^2}{4} - \frac{\log(1 + u^2)}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{(\tan 2x)^2}{4} - \frac{\log(1+(\tan 2x)^2)}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

b) studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan x}{x^{2\alpha-1}} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

SOLUZIONE di b)

Per $x \to 0+$ $\frac{\tan x}{x^{2\alpha-1}}$ è asintotico a $\frac{1}{x^{2\alpha-2}}$ per cui l'integrale è convergente se e solo se $2\alpha - 2 < 1$, vale a dire se e solo se $\alpha < \frac{3}{2}$.

Esercizio 5 (i) Si dimostri che la successione

$$a_n = \log(n+1) - \log\sqrt{n^2 + \alpha n + 3}$$

è infinitesima per $n \to \infty$ (per ogni α) e per $\alpha = 2$ se ne calcoli l'ordine;
(ii) si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

SOLUZIONE.

(i) La successione è infinitesima:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n+1}{\sqrt{n^2+\alpha n+3}}\right) = \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n(1+\frac{1}{n})}{n\left(\sqrt{1+\frac{\alpha}{n}+\frac{3}{n^2}}\right)}\right) = 0$$

Inoltre, si ha

$$a_n = \log\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - \log\left(n\left(\sqrt{1+\frac{\alpha}{n}+\frac{3}{n^2}}\right)\right) =$$

$$= \log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \log n - \log\left(\sqrt{1+\frac{\alpha}{n}+\frac{3}{n^2}}\right) =$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\alpha}{n}+\frac{3}{n^2}\right) =$$

(da $\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$, per $y \to 0$)

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{3}{n^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{3}{n^2}\right)^2 + o(\frac{1}{n^2}).$$

In particolare, se $\alpha = 2$, $a_n \sim \frac{-1}{n^2}$.

(ii) Per quanto visto al punto (i),

$$a_n \sim \begin{cases} \frac{2-\alpha}{2n} & \text{se } \alpha \neq 2 \\ \frac{-1}{n^2} & \text{se } \alpha = 2 \end{cases},$$

pertanto la serie converge se e solo se $\alpha = 2$.