

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 18.01.2021

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x^2 + x + 1}\right);$$

- (i) individuarne il dominio naturale, studiarne il segno, calcolare i limiti agli estremi del dominio;
- (ii) calcolarne la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti estremanti;
- (iii) abbozzare il grafico di f .

Svolgimento. (i). Iniziamo dallo studio del dominio naturale. Il denominatore $x^2 + x + 1 > 0$ sempre strettamente positivo, in quanto il determinante $\Delta = -3$ negativo. Considerando anche che il dominio della funzione \arctan è tutto \mathbb{R} , otteniamo $D = \mathbb{R}$.

Studiamo il segno di f : poichè $x^2 + x + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x^2 + x + 1}\right) \geq 0 \iff \frac{x}{x^2 + x + 1} \geq 0 \iff x \geq 0$$

e

$$f(x) = 0 \iff x = 0.$$

Studiamo i limiti agli estremi del dominio; abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{x}{x^2 + x + 1}\right) = \arctan\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + x + 1}\right)\right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan\left(\frac{x}{x^2 + x + 1}\right) = \arctan\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x^2 + x + 1}\right)\right) = 0.$$

Dunque $y = 0$ asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$.

(ii). La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)^2} \frac{-2x^2 - x + x^2 + x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)^2\right) (x^2 + x + 1)^2} (-x^2 + 1).$$

Dunque

$$f'(x) \geq 0 \iff 1 - x^2 \geq 0 \iff x \in [-1, 1]$$

e

$$f'(x) = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff x \in \{-1, 1\}.$$

Ne deduciamo che f è crescente nell'intervallo $[-1, 1]$, decrescente in $]-\infty, -1]$ ed in $[1, +\infty[$, quindi $x = -1$ è punto di minimo globale mentre $x = 1$ è punto di massimo globale.



Figure 1: Il grafico di f .

(iii). Il grafico della funzione è abbozzato in figura.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino in \mathbb{C} le soluzioni dell'equazione

$$z^4 + (-1 + i)z^2 - i = 0.$$

Suggerimento: sostituire $w = z^2$.

Svolgimento. Con la sostituzione $w = z^2$ si ottiene

$$w^2 + (-1 + i)w - i = 0$$

le cui soluzioni sono

$$w_{1,2} = \frac{1 - i + \sqrt{2}i}{2} = \frac{1 - i \pm (1 + i)}{2} = \{1, -i\}.$$

Perciò, le soluzioni sono 4 e coincidono con l'unione delle soluzioni di $z^2 = 1$ e $z^2 = -i$, vale a dire

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Esercizio 3 [8 punti]

(i) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}}.$$

(ii) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}.$$

Svolgimento. (i).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+1/n)^{2n}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} \right)^2 = e^{-2}.$$

(ii). Poiché la serie è a termini positivi, applichiamo il criterio del rapporto asintotico ed il risultato di (i), ottenendo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!n^{2n}}{(2n)!(n+1)^{2n+2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)n^{2n}}{(n+1)^2(n+1)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n^2+6n+2)n^{2n}}{(n^2+2n+1)(n+1)^{2n}} \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}} = 4e^{-2}. \end{aligned}$$

Vale $4e^{-2} < 1$; la serie è convergente.**Esercizio 4 [8 punti]** Per $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri

$$f_{\alpha}(x) = \frac{1}{\sinh x + x^{\alpha}}.$$

(a) Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza

$$\int_0^{\log 2} f_{\alpha}(x) dx.$$

(b) Calcolare

$$\int_0^{\log 2} f_0(x) dx.$$

Svolgimento. (a). Si tratta di un integrando a valori positivi quindi possiamo sfruttare il criterio del confronto asintotico. Da

$$f_{\alpha}(x) = \frac{1}{\sinh x + x^{\alpha}} = \frac{1}{x + o(x) + x^{\alpha}}$$

otteniamo che, per $x \rightarrow 0$ la funzione è asintotica a $\frac{1}{x}$ se $\alpha > 1$, a $\frac{2}{x}$ se $\alpha = 1$ e a $\frac{1}{x^{\alpha}}$ se $\alpha < 1$. Perciò l'integrale converge $\iff \alpha < 1$.(b) Con la sostituzione $t = e^x$ (cioè $x = \log t$) si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\log 2} f_0(x) dx &= \int_0^{\log 2} \frac{1}{\sinh x + 1} dx = \int_0^{\log 2} \frac{2}{e^x - e^{-x} + 2} dx = \int_1^2 \frac{2}{(t - t^{-1} + 2)t} dt \\ &= \int_1^2 \frac{2}{t^2 + 2t - 1} dt. \end{aligned}$$

Le radici di $t^2 + 2t - 1 = 0$ sono $-1 \pm \sqrt{2}$, dunque

$$\frac{1}{t^2 + 2t - 1} = \frac{A}{t + 1 - \sqrt{2}} + \frac{B}{t + 1 + \sqrt{2}}$$

per opportuni $A, B \in \mathbb{R}$. Si ha $1 = A(t + 1 + \sqrt{2}) + B(t + 1 - \sqrt{2})$, da cui

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A(1 + \sqrt{2}) + B(1 - \sqrt{2}) = 1 \end{cases}$$

dunque

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -B(1 + \sqrt{2}) + B(1 - \sqrt{2}) = 1 \end{cases}$$

e perciò $A = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $B = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Ne deduciamo

$$\begin{aligned} \int_0^{\log 2} f_0(x) dx &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \int_1^2 \frac{1}{t + 1 - \sqrt{2}} dt - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_1^2 \frac{1}{t + 1 + \sqrt{2}} dt \right) \\ &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \log |t + 1 - \sqrt{2}| - \frac{\sqrt{2}}{2} \log |t + 1 + \sqrt{2}| \right]_1^2 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left(\frac{3 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$