

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 8.02.2021

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{|x|}{x^2 + 1}}.$$

- (i) Determinare il dominio naturale di f , studiare il segno e la simmetria di f e calcolare limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(ii) Studiare la derivabilità di f e calcolare la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo/minimo assoluto/relativo;
(iii) abbozzare il grafico di f .

Svolgimento. (i). Iniziamo dal dominio naturale. Il denominatore $x^2 + 1 > 0$ sempre strettamente positivo. Il numeratore $|x|$ è sempre maggiore o uguale di zero. Considerando che il dominio della funzione radice è $[0, \infty)$, otteniamo $D = \mathbb{R}$.

Studiamo il segno e le simmetrie di f . La funzione è pari: $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre essa ha sempre valori non negativi:

$$f(x) = \sqrt{\frac{|x|}{x^2 + 1}} \geq 0 \iff x \in \mathbb{R},$$

e

$$f(x) = 0 \iff x = 0.$$

Studiamo i limiti agli estremi del dominio; abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$.

(ii) Studiamo la derivabilità di f . Si ha che $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ in quanto composizione di funzioni $C^1(\mathbb{R})$, esclusa la funzione $g(x) = |x|$ che sta solo in $C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Per ogni $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{|x|}{x^2+1}}} \frac{\operatorname{sgn}(x)(x^2+1) - |x|2x}{(x^2+1)^2}.$$

Dunque,

$$\{x > 0 \text{ e } f'(x) > 0\} \iff (x^2 + 1) - 2x^2 > 0 \iff 1 - x^2 > 0 \iff x \in]0, 1[$$

e

$$\{x > 0 \text{ and } f'(x) = 0\} \iff x = 1$$

Per simmetria, si ha

$$\{x < 0 \text{ and } f'(x) > 0\} \iff x \in]-\infty, -1[$$

e

$$\{x < 0 \text{ and } f'(x) = 0\} \iff x = -1.$$

Inoltre, per il teorema del limite della derivata,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x^2}{2(x^2 + 1)^2 \sqrt{\frac{|x|}{x^2 + 1}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{|x|}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-1)(1 - x^2)}{2(x^2 + 1)^2 \sqrt{\frac{|x|}{x^2 + 1}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{2\sqrt{|x|}} = -\infty\end{aligned}$$

perciò, la funzione non è derivabile in $x = 0$, dove ha una cuspid.

Dalla precedente analisi e dalla continuità della funzione si ha che la funzione è crescente in ognuno dei due intervalli $[0, 1]$ e $]-\infty, -1]$ ed è decrescente in ognuno dei due intervalli $[-1, 0]$ e $[1, +\infty[$.

Inoltre vi è un massimo (risp. minimo) globale in $x = 1$ (risp. $x = -1$).

(iii). Il grafico della funzione è abbozzato in figura.

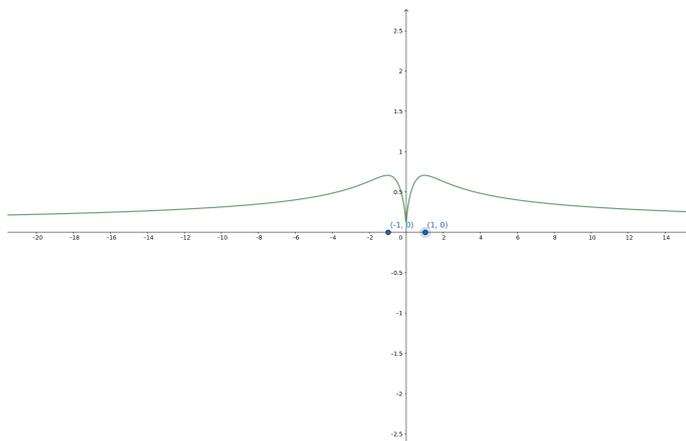


Figure 1: Il grafico di f .

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni complesse dell'equazione

$$\frac{8}{z^3} = \frac{1+i}{1-i},$$

esprese in forma algebrica e esponenziale (o trigonometrica), e le si disegnino sul piano complesso.

Svolgimento. Da

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i$$

otteniamo

$$z^3 = \frac{8}{i} = -8i.$$

Le soluzioni dell'equazione sono le (tre) radici terze di $-8i = 8e^{i\frac{3}{2}\pi}$, cioè

$$z_1 = 2e^{i\frac{1}{2}\pi} = 2i, \quad z_2 = 2e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\sqrt{3} - i, \quad z_3 = 2e^{i\frac{11}{6}\pi} = \sqrt{3} - i$$

e sono disegnate nella figura seguente

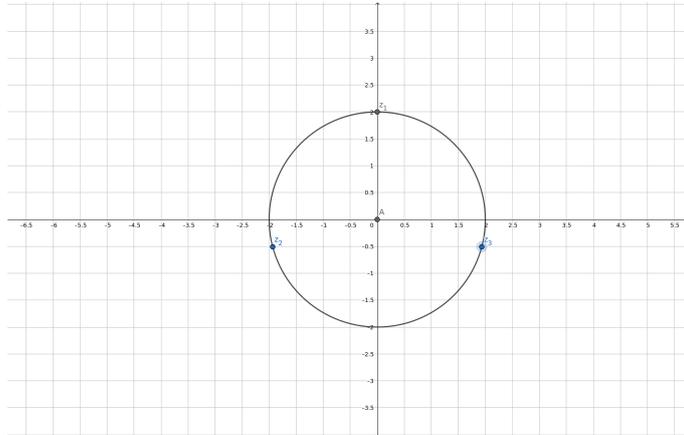


Figure 2: Le soluzioni dell'esercizio 2.

Esercizio 3 [8 punti]

(i) Calcolare

$$\int \log(t+1) dt.$$

(ii) Dedurre il valore di

$$\int_0^1 \frac{\log(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} dx.$$

Svolgimento. (i) Per parti:

$$\begin{aligned} \int \log(t+1) dt &= \log(t+1)t - \int \frac{t}{t+1} dt \\ &= t \log(t+1) - \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= t \log(t+1) - t + \log|t+1| + c, \end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Utilizzando la sostituzione $t = \sqrt{x}$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\log(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{\log(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_{\sqrt{c}}^1 \frac{\log(t+1)}{t} 2t dt \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} 2 \int_{\sqrt{c}}^1 \log(t+1) dt \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} 2 [t \log(t+1) - t + \log(t+1)]_{\sqrt{c}}^1 \\ &= 2(2 \log 2 - 1) \end{aligned}$$

Esercizio 4 [8 punti]

(i) Individuare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ordine di infinitesimo di

$$n(\cos(1/n) - 1) + \frac{\alpha}{n}$$

(ii) Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| n(\cos(1/n) - 1) + \frac{\alpha}{n} \right|.$$

Svolgimento. (i)

$$n(\cos(1/n) - 1) + \frac{\alpha}{n} = n \left(-\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{24n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) + \frac{\alpha}{n} = \frac{-1/2 + \alpha}{n} + \frac{1}{24n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

è di ordine 1 per ogni $\alpha \neq 1/2$ e di ordine 3 per $\alpha = 1/2$.

(ii) La serie è a termini di segno costante. Da quanto visto nel punto precedente, il termine generale della serie verifica le seguenti asintoticità

$$a_n \sim \begin{cases} \frac{-1/2 + \alpha}{n} & \text{se } \alpha \neq 1/2 \\ \frac{1}{24n^3} & \text{se } \alpha = 1/2. \end{cases}$$

Applicando il teorema del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, otteniamo che la serie converge se $\alpha = 1/2$ e diverge se $\alpha \neq 1/2$.

NB: con \log si indica il logaritmo in base e .

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 8.02.2021

TEMA 2

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{|x|}{x^2 + 2}}.$$

- (i) Determinare il dominio naturale di f , studiare il segno e la simmetria di f e calcolare limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(ii) Studiare la derivabilità di f e calcolare la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo/minimo assoluto/relativo;
(iii) abbozzare il grafico di f .

Svolgimento. (i). Iniziamo dal dominio naturale. Il denominatore $x^2 + 2 > 0$ sempre strettamente positivo. Il numeratore $|x|$ è sempre maggiore o uguale a zero. Considerando che il dominio della funzione radice è $[0, \infty)$, otteniamo $D = \mathbb{R}$.

Studiamo il segno e le simmetrie di f . La funzione è pari: $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre essa ha sempre valori non negativi:

$$f(x) = \sqrt{\frac{|x|}{x^2 + 2}} \geq 0 \iff x \in \mathbb{R},$$

e

$$f(x) = 0 \iff x = 0.$$

Studiamo i limiti agli estremi del dominio; abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$.

(ii) Studiamo la derivabilità di f . Si ha che $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ in quanto composizione di funzioni C^1 , esclusa la funzione $g(x) = |x|$ che sta solo in $C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Per ogni $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{|x|}{x^2+2}}} \frac{\operatorname{sgn}(x)(x^2+2) - |x|2x}{(x^2+2)^2}.$$

Dunque,

$$\{x > 0 \text{ e } f'(x) > 0\} \iff (x^2 + 2) - 2x^2 > 0 \iff 2 - x^2 > 0 \iff x \in]0, \sqrt{2}[$$

e

$$\{x > 0 \text{ and } f'(x) = 0\} \iff x = \sqrt{2}$$

Per simmetria, si ha

$$\{x < 0 \text{ and } f'(x) > 0\} \iff x \in]-\infty, -\sqrt{2}[$$

e

$$\{x < 0 \text{ and } f'(x) = 0\} \iff x = -\sqrt{2}.$$

Inoltre, per il teorema del limite della derivata,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 - x^2}{2(x^2 + 2)^2 \sqrt{\frac{|x|}{x^2 + 2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{4\sqrt{2}\sqrt{|x|}} = +\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2 + x^2}{2(x^2 + 2)^2 \sqrt{\frac{|x|}{x^2 + 2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2}{4\sqrt{2}\sqrt{|x|}} = -\infty$$

perciò, la funzione non è derivabile in $x = 0$, dove ha una cuspid.

Dalla precedente analisi e dalla continuità della funzione si ha che la funzione è crescente in ognuno dei due intervalli $[0, \sqrt{2}]$ e $]-\infty, -\sqrt{2}]$ ed è decrescente in ognuno dei due intervalli $[-\sqrt{2}, 0]$ e $[\sqrt{2}, +\infty[$.

Inoltre vi è un massimo (risp. minimo) globale in $x = \sqrt{2}$ (risp. $x = -\sqrt{2}$).

(iii). Il grafico della funzione è abbozzato in figura.

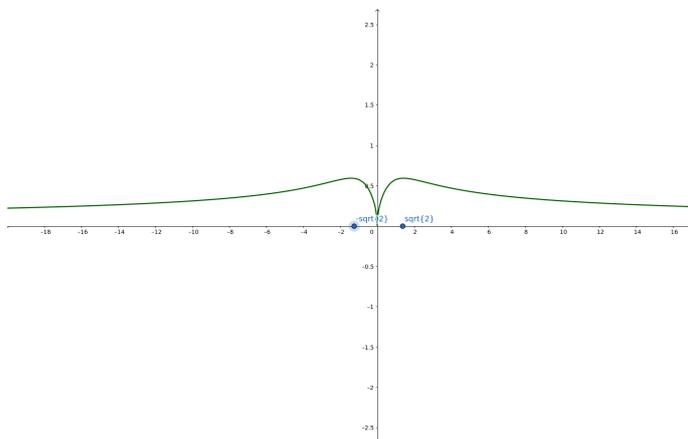


Figure 3: Il grafico di f .

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni complesse dell'equazione

$$\frac{8}{z^3} = \frac{1-i}{1+i},$$

esprese in forma algebrica e esponenziale (o trigonometrica), e le si disegnino sul piano complesso.

Svolgimento. Da

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{-2i}{2} = -i$$

otteniamo

$$z^3 = \frac{8}{-i} = 8i.$$

Le soluzioni dell'equazione sono le (tre) radici terze di $8i = 8e^{i\frac{1}{2}\pi}$, cioè

$$z_1 = 2e^{i\frac{1}{6}\pi} = \sqrt{3} + i, \quad z_2 = 2e^{i\frac{5}{6}\pi} = -\sqrt{3} + i, \quad z_3 = 2e^{i\frac{3}{2}\pi} = -2i$$

e sono disegnate nella figura seguente

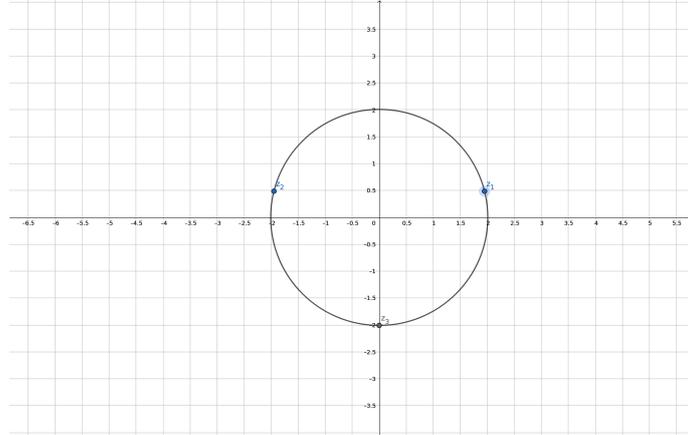


Figure 4: Le soluzioni dell'esercizio 2.

Esercizio 3 [8 punti]

(i) Calcolare

$$\int \log(1-t) dt.$$

(ii) Dedurre il valore di

$$\int_0^{1/4} \frac{\log(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx.$$

Svolgimento. (i) Per parti:

$$\begin{aligned} \int \log(1-t) dt &= \log(1-t)t - \int \frac{t}{t-1} dt \\ &= t \log(1-t) - \int \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) dt \\ &= t \log(1-t) - t - \log|t-1| + c \end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Utilizzando la sostituzione $t = \sqrt{x}$,

$$\begin{aligned}\int_0^{1/4} \frac{\log(1 - \sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^{1/4} \frac{\log(1 - \sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_{\sqrt{c}}^{1/2} \frac{\log(1 - t)}{t} 2t dt \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} 2 \int_{\sqrt{c}}^{1/2} \log(1 - t) dt \\ &= 2 \lim_{c \rightarrow 0^+} [t \log(1 - t) - t - \log |t - 1|]_{\sqrt{c}}^{1/2} \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} - \log \left(\frac{1}{2} \right) \right] = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) [-\log(2) - 1] = 1 + \log(2)\end{aligned}$$

Esercizio 4 [8 punti]

(i) Individuare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ordine di infinitesimo di

$$n (\cos(1/n) - 1) + \frac{\alpha}{2n}$$

(ii) Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| n (\cos(1/n) - 1) + \frac{\alpha}{2n} \right|.$$

Svolgimento. (i)

$$n (\cos(1/n) - 1) + \frac{\alpha}{2n} = n \left(-\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{24n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) + \frac{\alpha}{2n} = \frac{-1 + \alpha}{2n} + \frac{1}{24n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

è di ordine 1 per ogni $\alpha \neq 1$ e di ordine 3 per $\alpha = 1$.

(ii) La serie è a termini di segno costante. Da quanto visto nel punto precedente, il termine generale della serie verifica le seguenti asintoticità

$$a_n \sim \begin{cases} \frac{-1+\alpha}{2n} & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{24n^3} & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Applicando il teorema del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, otteniamo che la serie converge se $\alpha = 1/2$ e diverge se $\alpha \neq 1/2$.

NB: con \log si indica il logaritmo in base e .

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.