ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 13.9.2021

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{1 - 2\cos x} \quad .$$

(i) Determinarne il dominio naturale; studiarne la periodicità, il segno e la simmetria di f;
(ii) studiarne la derivabilità e calcolarne la derivata prima; studiarne gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo/minimo assoluto/relativo;
(iii) abbozzarne il grafico.

Svolgimento. (i). La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$1 - 2\cos x \neq 0 \iff \cos x \neq \frac{1}{2} \iff x \in \mathbb{R}\backslash \left\{ \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Chiaramente la funzione è periodica con periodo 2π. Inoltre

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{1 - 2\cos x} = \frac{|\sin(-x)|}{1 - 2\cos(-x)} = f(-x)$$

perciò la funzione è pari, cioè il suo grafico è simmetrico rispetto all' asse delle ordinate.

Limito lo studio al dominio $[-\pi, \pi]\backslash\{\pm\frac{\pi}{3}\}$; calcolo il limite agli estremi

$$\lim_{x\to\pi/3-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\pi/3+} f(x) = +\infty.$$

(ii). Per ogni punto del dominio tale che $|\sin x| \neq 0$, cioé $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha

$$f'(x) = \frac{\cos x \frac{|\sin x|}{\sin x}(1 - 2\cos x) - 2\sin x|\sin x|}{(1 - 2\cos x)^2} = \frac{|\sin x|}{(1 - 2\cos x)^2}\left(\frac{\cos x}{\sin x}(1 - 2\cos x) - 2\sin x\right)$$

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{\sin x}\left(\cos x - 2\cos^2 x + 2\sin^2 x\right) = \frac{1}{\sin x}(\cos x - 2) \geq 0$$

In $]0, \pi[\backslash\pi/3$ si ha $\sin x > 0$ e $\cos x - 2 < 0$, dunque $f'(x) < 0$, perciò le restrizioni agli intervalli $]0, \pi/3[,]\pi/3, \pi[$ sono strettamente decrescenti. Per simmetria le restrizioni agli intervalli $] - \pi/3, 0[,] - \pi, -\pi/3[$ sono strettamente crescenti. e, la funzione ha un minimo locale in π, di valore $f(\pi) = 0$ e dunque in ogni punto $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = 1 \quad \lim_{x\to 0+} f'(x) = -1 \quad \lim_{x\to\pi-} f'(x) = -\frac{1}{3} \lim_{x\to-\pi+} f'(x) = \frac{1}{3};$$

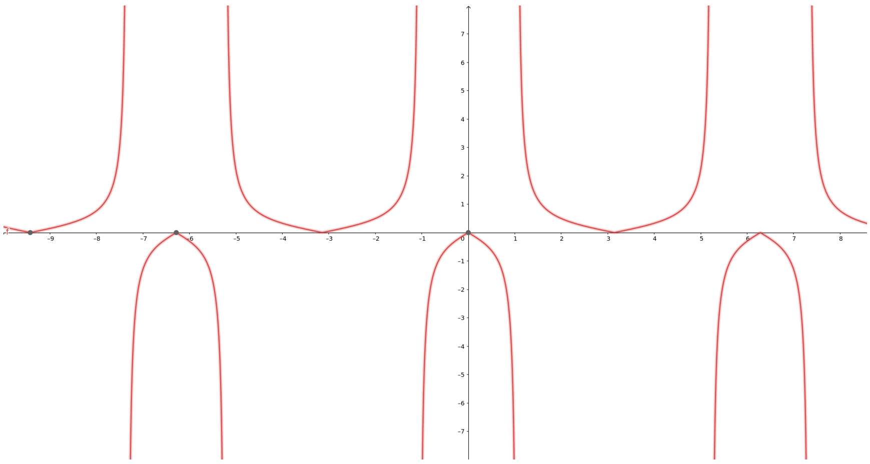

Figure 1: Il grafico di f.

quindi la funziona presenta punti angolosi in $k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.
(iii). Vedi figura.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della disequazione

$$\left|\frac{z+1}{z}\right| \geq 1$$

e le si disegnino sul piano complesso.
Svolgimento. Innanzitutto osserviamo che il campo di esistenza della disuguaglianza è dato da $|z| \neq 0$ cioè da $z \neq 0$. Forniamo due metodi di soluzione.

1. Eleviamo al quadrato entrambi i membri:

$$\frac{|z+1|^2}{|z|^2} \geq 1 \iff (x+1)^2 + y^2 \geq x^2 + y^2 \iff 1 + 2x \geq 0 \iff x \geq -1/2$$

2. $$\left|\frac{z+1}{z}\right| \geq 1 \iff \left|1 + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right| \geq 1 \iff \left|x^2 + y^2 + x - iy\right| \geq x^2 + y^2$$

   se e solo se

   $$x^4 + y^4 + x^2 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 + y^2 \geq x^4 + y^4 + 2x^2y^2$$

   se e solo se

   $$x^2 + 2x^3 + 2xy^2 + y^2 \geq 0 \iff (2x+1)(x^2+y^2) \geq 0 \iff 2x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1/2.$$

Le soluzioni sono i numeri complessi $z = x + iy$ (con $x, y \in \mathbb{R}$) tali che: $z \neq 0$ e $x \geq -1/2$.

Esercizio 3 [8 punti]
Studiare la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Usando lo sviluppo di McLaurin di $\sin x$ si ottiene che è asintotica alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6} n^{\alpha-3},$$

in particolare è una serie a termini positivi. Possiamo pertanto applicare il criterio del confronto asintotico e dedurre che essa è convergente se e solo se $\alpha - 3 < -1$, cioè $\alpha < 2$, ed è divergente per $\alpha \geq 2$.

Esercizio 4 [8 punti]
Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2 + 2x + 2}\, dx.$$

Svolgimento. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2 + 2x + 2}\, dx &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} \frac{2x + 2 - 2}{x^2 + 2x + 2}\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2}\, dx - \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\, dx \\
&= \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) \Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{1}{(x+1)^2 + 1}\, dx \\
&= \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) \Big|_{-1}^{0} - \arctan(x+1) \Big|_{-1}^{0} \\
&= \frac{1}{2} \log(2) - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.