ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione
Appello del 17.01.2022

TEMA 1

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x+1|}{x^2+4}\right),$$

(i) individuarne il dominio naturale, studiarne il segno, calcolare i limiti agli estremi del dominio;
(ii) studiare la derivabilità di f sul suo dominio, calcolare la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o minimo relativo;
(iii) abbozzare il grafico.

Esercizio 2 [7 punti] Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{z}{i}\right)^3 = -8.$$

Esercizio 3 [7 punti]
Studiare, utilizzando opportuni sviluppi di Mac Laurin applicati alla successione

$$a_n = \frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \alpha \log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right),$$

la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [8 punti]
Usando la definizione (e il metodo di sostituzione), calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)(\arctan^2 t + 8\arctan t + 17)}\, dt.$$

Facoltativo: Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)^{2\alpha}(\arctan^2 t + 8\arctan t + 17)}\, dt.$$

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore.

È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2m+1}) \qquad \forall m \geq 0$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^m) \qquad \forall m \geq 1$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione
Appello del 17.01.2022

TEMA 2

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|2x+1|}{x^2+5}\right),$$

(i) individuarne il dominio naturale, studiarne il segno, calcolare i limiti agli estremi del dominio;
(ii) studiare la derivabilità di f sul suo dominio, calcolare la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o minimo relativo;
(iii) abbozzare il grafico.

Esercizio 2 [7 punti] Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(-\frac{z}{i}\right)^3 = 27.$$

Esercizio 3 [7 punti]
Studiare, utilizzando opportuni sviluppi di Mac Laurin applicati alla successione

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} + \alpha \log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right),$$

la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [8 punti]
Usando la definizione (e il metodo di sostituzione), calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)(\arctan^2 t + 4\arctan t + 5)}\, dt.$$

Facoltativo: Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)^{(\alpha-1)}(\arctan^2 t + 4\arctan t + 5)}\, dt.$$

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore.

È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2m+1}) \qquad \forall m \geq 0$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^m) \qquad \forall m \geq 1$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione
Appello del 17.01.2022

TEMA 3

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x-5|}{x^2+3}\right),$$

(i) individuarne il dominio naturale, studiarne il segno, calcolare i limiti agli estremi del dominio;
(ii) studiare la derivabilità di f sul suo dominio, calcolare la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o minimo relativo;
(iii) abbozzare il grafico.

Esercizio 2 [7 punti] Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{z}{i}\right)^3 = -\frac{1}{8}.$$

Esercizio 3 [7 punti]
Studiare, utilizzando opportuni sviluppi di Mac Laurin applicati alla successione

$$a_n = \frac{1}{n} - \sinh\left(\frac{1}{n}\right) + \alpha \log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right),$$

la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [8 punti]
Usando la definizione (e il metodo di sostituzione), calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)(\arctan^2 t + 6\arctan t + 10)}\, dt.$$

Facoltativo: Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)^{(\alpha+3)}(\arctan^2 t + 6\arctan t + 10)}\, dt.$$

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore.

È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2m+1}) \qquad \forall m \geq 0$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^m) \qquad \forall m \geq 1$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione
Appello del 17.01.2022

TEMA 4

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|2x+3|}{x^2+9}\right),$$

(i) individuarne il dominio naturale, studiarne il segno, calcolare i limiti agli estremi del dominio;
(ii) studiare la derivabilità di f sul suo dominio, calcolare la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o minimo relativo;
(iii) abbozzare il grafico.

Esercizio 2 [7 punti]
Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(-\frac{z}{i}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

Esercizio 3 [7 punti]
Studiare, utilizzando opportuni sviluppi di Mac Laurin applicati alla successione

$$a_n = \sinh\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - \alpha \log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right),$$

la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [8 punti]
Usando la definizione, (e il metodo di sostituzione) calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)(\arctan^2 t + 2\arctan t + 2)}\, dt.$$

Facoltativo: Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)^{\alpha-2}(\arctan^2 t + 2\arctan t + 2)}\, dt.$$

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore.

È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2m+1}) \qquad \forall m \geq 0$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^m) \qquad \forall m \geq 1$$