ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 07.02.2022

TEMA 1

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \log\left(|x| - x^2 + 2\right),$$

(i) determinarne il dominio naturale; determinarne la eventuale simmetria e il segno; calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(ii) studiarne la derivabilità e calcolarne la derivata prima; studiarne gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo e di minimo sia relatvi che assoluti;
(iii) abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [7 punti] Determinare l'insieme A dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{|z + i\mathcal{I}m(z)|^2}{|z|^2 + \mathcal{R}e(z)^2} \geq 1$$

e disegnarlo nel piano complesso.

Esercizio 3 [7 punti]
Studiare la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left\{\alpha \sinh\left(\frac{1}{n^2}\right) + \log\left[\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [8 punti]
Usando l'integrazione per parti, calcolare

$$\int \arctan\left(\frac{2}{x}\right)\, dx.$$

Facoltativo. Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x^3+1}{x^\alpha}\right)\, dx$$

al variare di $\alpha > 0$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore.
È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin. Per $x \to 0$, valgono

$$\log(1+x) = \textstyle\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^m) \qquad \forall m \geq 1$$
$$\sinh(x) = \textstyle\sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2m+2}) \qquad \forall m \geq 0$$
$$\cosh(x) = \textstyle\sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2m+1}) \qquad \forall m \geq 0$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 07.02.2022

TEMA 2

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \log\left(2|x| - x^2 + 3\right),$$

(i) determinarne il dominio naturale; determinarne la eventuale simmetria e il segno; calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(ii) studiarne la derivabilità e calcolarne la derivata prima; studiarne gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo e di minimo sia relatvi che assoluti;
(iii) abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [7 punti] Determinare l'insieme A dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{|z + \mathcal{R}e(z)|^2}{|z|^2 + \mathcal{I}m(z)^2} \geq 1$$

e disegnarlo nel piano complesso.

Esercizio 3 [7 punti]
Studiare la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ \log\left[\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \alpha \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [8 punti]
Usando l'integrazione per parti, calcolare

$$\int \arctan\left(\frac{3}{x}\right)\, dx.$$

Facoltativo. Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x+1}{x^{2\alpha}}\right)\, dx$$

al variare di $\alpha > 0$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore.
È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin. Per $x \to 0$, valgono

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^m) \qquad \forall m \geq 1$$
$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2m+2}) \qquad \forall m \geq 0$$
$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2m+1}) \qquad \forall m \geq 0$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 07.02.2022

TEMA 3

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \log\left(4|x| - x^2 + 5\right),$$

(i) determinarne il dominio naturale; determinarne la eventuale simmetria e il segno; calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(ii) studiarne la derivabilità e calcolarne la derivata prima; studiarne gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo e di minimo sia relatvi che assoluti;
(iii) abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [7 punti] Determinare l'insieme A dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{|z - 3\mathcal{R}e(z)|^2}{|z|^2 + \mathcal{I}m(z)^2} \geq 1$$

e disegnarlo nel piano complesso.

Esercizio 3 [7 punti]
Studiare la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ \alpha \sinh\left(\frac{1}{n^2}\right) - \log\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [8 punti]
Usando l'integrazione per parti, calcolare

$$\int \arctan\left(\frac{4}{x}\right) dx.$$

Facoltativo. Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x+1}{x^{3\alpha}}\right) dx$$

al variare di $\alpha > 0$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore.
È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin. Per $x \to 0$, valgono

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^m) \qquad \forall m \geq 1$$
$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2m+1}) \qquad \forall m \geq 0$$
$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2m+2}) \qquad \forall m \geq 0$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 07.02.2022

TEMA 4

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \log\left(3|x| - x^2 + 4\right),$$

(i) determinarne il dominio naturale; determinarne la eventuale simmetria e il segno; calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(ii) studiarne la derivabilità e calcolarne la derivata prima; studiarne gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo e di minimo sia relatvi che assoluti;
(iii) abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [7 punti] Determinare l'insieme A dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{|z - 3i\mathcal{I}m(z)|^2}{|z|^2 + \mathcal{R}e(z)^2} \geq 1$$

e disegnarlo nel piano complesso.

Esercizio 3 [7 punti]
Studiare la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ \log\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] - \alpha \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [8 punti]
Usando l'integrazione per parti, calcolare

$$\int \arctan\left(\frac{5}{x}\right) dx.$$

Facoltativo. Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x^2+1}{x^\alpha}\right) dx$$

al variare di $\alpha > 0$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore.
È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin. Per $x \to 0$, valgono

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^m) \qquad \forall m \geq 1$$
$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2m+2}) \qquad \forall m \geq 0$$
$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2m+1}) \qquad \forall m \geq 0$$