ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 07.02.2022

TEMA 1

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \log\left(|x| - x^2 + 2\right),$$

(i) determinarne il dominio naturale; determinarne la eventuale simmetria e il segno.

$$x \in \text{Dominio} \iff |x| - x^2 + 2 > 0 \quad \iff |x|^2 - |x| - 2 < 0 \ \ (\text{da } x^2 = |x|^2)$$

disequazione che è risolta da

$$|x| \in \,]-1, 2[\iff |x| \in [0, 2[\iff x \in \,]-2, 2[$$

Dunque Dominio$= \,]-2, 2[$
La funzione è chiaramente pari.
La funzione è continua perché composta di funzioni continue.

In alternativa si sarebbe potuto anche argomentare come segue.

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(x - x^2 + 2\right) & \forall x \geq 0 \\ \log\left(-x - x^2 + 2\right) & \forall x < 0 \end{cases}$$

Si osserva che f è pari, e si limita lo studio a $x \geq 0$. Dunque $x \in$ Dominio e $x \geq 0$ se e solo se $x - x^2 + 2 > 0$ e $x \geq 0$, cioè $x \in [0, 2[$. Poiché f è pari, risulta

$$\text{Dominio} =]-2, 2[$$

.

Inoltre

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - x^2 + 2 \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff x \in \left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Per simmetria si conclude che

$$f(x) \geq 0 \iff x \in \left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

Calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty \quad \text{che per simmetria implica} \quad \lim_{x\to -2} f(x) = -\infty$$

così in 2 e -2 ci sono due asintoti verticali.
(ii) studiarne la derivabilità e calcolarne la derivata prima; studiarne gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo e di minimo sia relatvi che assoluti:

$$\begin{cases} x > 0 \\ f'(x) = \dfrac{1-2x}{x-x^2+2} > 0 \end{cases} \iff x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[.$$

Inoltre $f'(x) = 0,\ x > 0$ se e solo se $x = \frac{1}{2}$ Poichè f è continua nel suo dominio, se ne deduce che f è strettamente crescente in $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, strettamente decrescente in $\left[\frac{1}{2}, 2\right[$, e ha un punto di massimo relativo in $x = \frac{1}{2}$.

Per simmetria si ha anche che f è strettamente decrescente in $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, strettamente crescente in $\left]-2, -\frac{1}{2}\right[$, e ha un punto di massimo relativo in $x = -\frac{1}{2}$.

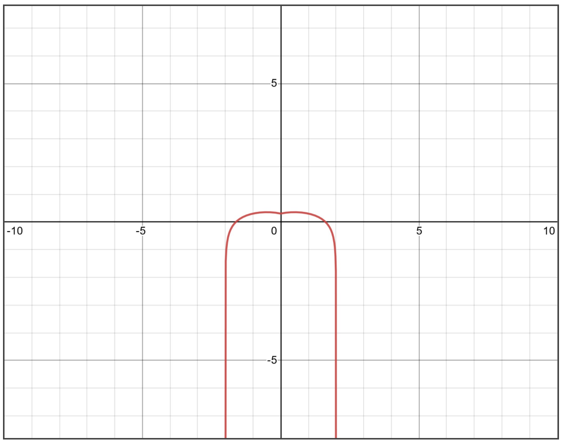
In particolare $x = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ sono punti di massimo assoluto.

Per $x = 0$ (la funzione è continua): $f(0) = \log 2$. $x = 0$ è dunque punto di minimo relativo (ma non assoluto perché f tende a $-\infty$ agli estremi).

Si ha inoltre $\lim_x \to 0^+ f'(x) = 1/2 = f'_+(0)$, che per simmetria implica $f'_-(0) = -1/2$, Dunque 0 è un punto angoloso.

(iii) abbozzarne il grafico.

Desmos | Elaboratore grafico https://www.desmos.com/calculator?lang=it



1 di 2 31/01/2022, 15:34

Esercizio 2 [7 punti] Determinare l'insieme A dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

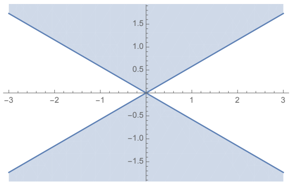
$$\frac{|z + i\mathcal{I}m(z)|^2}{|z|^2 + \mathcal{R}e(z)^2} \geq 1$$

e disegnarlo nel piano complesso.

Se scriviamo $z = x + iy$, la disequazione diventa

$$\frac{|x + 2yi|^2}{2x^2 + y^2} = \frac{x^2 + 4y^2}{2x^2 + y^2} \geq 1$$

Il numeratore è 0 se e e solo se $(x, y) = (0, 0)$. Negli altri punti è positivo, perciò per $(x, y) \neq (0, 0)$ la



disequazione è equivalente a

$$x^2 + 4y^2 \geq 2x^2 + y^2 \iff$$

$$3y^2 - x^2 = (\sqrt{3}y - x)(\sqrt{3}y + x) \geq 0 \iff$$

$$x + iy \in \left\{x + iy,\ \ y \leq x/\sqrt{3},\ \ y \leq -x/\sqrt{3}\right\} \cup \left\{x + iy,\ \ y \geq x/\sqrt{3},\ \ y \geq -x/\sqrt{3}\right\}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

In alternativa, si poteva anche osservare che la disequazione è equivalente a

$$x^2 + 4y^2 \geq 2x^2 + y^2 \iff 3y^2 - x^2 \geq 0 \iff$$

$$y^2 \geq \frac{1}{3} x^2 \iff y \geq \frac{1}{\sqrt{3}} |x| \quad \text{oppure} \quad y \leq -\frac{1}{\sqrt{3}} |x|$$

e dire che l'insieme A delle soluzioni è

$$A = \left\{x + iy : \quad y \geq \frac{1}{\sqrt{3}} |x|, \quad (x, y) \neq (0, 0)\right\} \cup \left\{x + iy, : \quad y \leq -\frac{1}{\sqrt{3}} |x|, \quad (x, y) \neq (0, 0)\right\}.$$

Esercizio 3 [7 punti]
Studiare la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left\{\alpha \sinh\left(\frac{1}{n^2}\right) + \log\left[\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Da

$$n \left\{\alpha \sinh\left(\frac{1}{n^2}\right) + \log\left[\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\} =$$

$$= n \left\{\alpha \frac{1}{n^2} + \alpha \cdot o\left(\frac{1}{n^4}\right) + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{12n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right\} =$$

$$= (2\alpha + 1)\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

dove abbiamo usato lo sviluppo di Mac Laurin di sinh e della funzione composta

$$\log\left[\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \log\left[1 + \left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right] = \left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^4}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{24}\frac{1}{n^4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^4}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{12}\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

deduciamo che essa è una serie a segno definitivamente costante e, applicando il criterio del confronto asintotico, che converge se e solo se $2\alpha+1=0$, i.e. $\alpha=-1/2$.

Esercizio 4 [8 punti]
Usando l'integrazione per parti, calcolare

$$\int \arctan\left(\frac{2}{x}\right)\,dx.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}\int \arctan\left(\frac{2}{x}\right)\,dx &= \int \arctan\left(\frac{2}{x}\right)\,dx\\ &= x\arctan\left(\frac{2}{x}\right)+\int\frac{2}{x(1+4/x^2)}dx\\ &= x\arctan\left(\frac{2}{x}\right)+\int\frac{2x}{x^2+4}dx\\ &= x\arctan\left(\frac{2}{x}\right)+\log(x^2+4)+c,\quad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Facoltativo. Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty}\arctan\left(\frac{x^3+1}{x^\alpha}\right)\,dx$$

al variare di $\alpha>0$.

Osserviamo che la funzione integranda è sempre $C^{(0)}((0,+\infty))$ e nonnegativa. All'estremo $x=0$ l'integrando tende a $\pi/2$ dunque

$$\int_0^{1}\arctan\left(\frac{x^3+1}{x^\alpha}\right)\,dx$$

è integrabile per ogni $\alpha>0$. Studiamo l'integrabilità di

$$\int_1^{+\infty}\arctan\left(\frac{x^3+1}{x^\alpha}\right)\,dx$$

Se $\alpha\le 3$ l'argomento dell' arcotangente è sempre >1 per cui $\arctan\left(\frac{x^3+1}{x^\alpha}\right)>\pi/4$. Ne consegue che l'integrale diverge. Se $\alpha>3$, l'argomento di arcotangente tende a zero per $x\to+\infty$, e l'integrando è asintotico a $1/x^{\alpha-3}$. Dunque l'ultimo integrale converge se e solo se $\alpha-3>1$, cioè $\alpha>4$.

In conclusione

$$\int_0^{+\infty}\arctan\left(\frac{x^3+1}{x^\alpha}\right)\,dx$$

converge se e solo se $\alpha>4$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 07.02.2022

TEMA 2

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \log\left(2|x| - x^2 + 3\right),$$

(i) determinarne il dominio naturale; determinarne la eventuale simmetria e il segno.

$$x \in \text{Dominio} \iff 2|x| - x^2 + 2 > 0 \quad \iff |x|^2 - 2|x| - 3 < 0 \;\; (\text{da } x^2 = |x|^2)$$

disequazione che è risolta da

$$|x| \in \left]-1, 3\right[\iff |x| \in [0, 3[\iff x \in \left]-3, 3\right[.$$

Dunque Dominio= $]-3, 3[$
La funzione è chiaramente pari.
La funzione è continua perché composta di funzioni continue.

In alternativa si sarebbe potuto anche argomentare come segue.

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(2x - x^2 + 3\right) & \forall x \geq 0 \\ \log\left(-2x - x^2 + 3\right) & \forall x < 0 \end{cases}$$

Si osserva che f è pari, e si limita lo studio a $x \geq 0$. Dunque $x \in$ Dominio e $x \geq 0$ se e solo se $2x - x^2 + 3 > 0$ e $x \geq 0$, cioè $x \in [0, 3[$. Poiché f è pari, risulta

$$\text{Dominio} =]-3, 3[$$

.

Inoltre

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - x^2 + 3 \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff x \in \left[0, 1 + \sqrt{3}\right].$$

Per simmetria si conclude che

$$f(x) \geq 0 \iff x \in \left[-1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right]$$

Calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = -\infty \quad \text{che per simmetria implica} \quad \lim_{x \to -3} f(x) = -\infty$$

così in 3 e -3 ci sono due asintoti verticali.
(ii) studiarne la derivabilità e calcolarne la derivata prima; studiarne gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo e di minimo sia relatvi che assoluti:

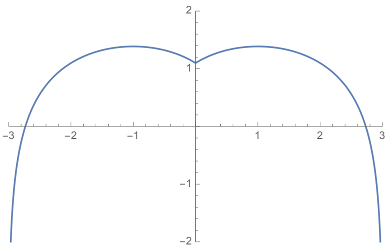
$$\begin{cases} x > 0 \\ f'(x) = \dfrac{2-2x}{2x - x^2 + 3} \geq 0 \end{cases} \iff x \in \,]0,1[\,.$$

Inoltre $f'(x) = 0$, $x > 0$ se e solo se $x = 1$ Poichè f è continua nel suo dominio, se ne deduce che f è strettamente crescente in $[0,1]$, strettamente decrescente in $[1,3[$, e ha un punto di massimo relativo in $x = 1$.

Per simmetria si ha anche che f è strettamente decrescente in $[-1,0]$, strettamente crescente in $]-3,-1[$, e ha un punto di massimo relativo in $x = -1$.

In particolare $x = 1, -1$ sono punti di massimo assoluto.
Per $x = 0$ (la funzione è continua): $f(0) = \log 3$. $x = 0$ è dunque punto di minimo relativo (ma non assoluto perché f tende a $-\infty$ agli estremi).
Si ha inoltre $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 2/3 = f'_+(0)$, che per simmetria implica $f'_-(0) = -2/3$, Dunque 0 è un punto angoloso.

(iii) abbozzarne il grafico.



Esercizio 2 [7 punti] Determinare l'insieme A dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

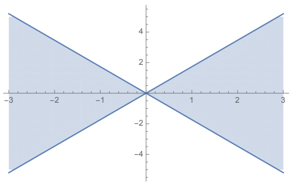
$$\frac{|z + \mathcal{R}e(z)|^2}{|z|^2 + \mathcal{I}m(z)^2} \geq 1$$

e disegnarlo nel piano complesso.

Se scriviamo $z = x + iy$, la disequazione diventa

$$\frac{|2x + yi|^2}{x^2 + 2y^2} = \frac{4x^2 + y^2}{x^2 + 2y^2} \geq 1$$

Il numeratore è 0 se e e solo se $(x,y) = (0,0)$. Negli altri punti è positivo, perciò per $(x,y) \neq (0,0)$ la



disequazione è equivalente a

$$4x^2 + y^2 \geq x^2 + 2y^2 \iff$$

$$3x^2 - y^2 = (\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}x + y) \geq 0 \iff$$

$$x + iy \in \left\{x + iy,\ \ y \geq \sqrt{3}x,\ \ y \leq -\sqrt{3}x\right\} \cup \left\{x + iy,\ \ y \leq \sqrt{3}x,\ \ y \geq -\sqrt{3}x\right\}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

In alternativa, si poteva anche osservare che la disequazione è equivalente a

$$3x^2 - y^2 \geq 0 \iff$$

$$y^2 \leq 3\,x^2 \iff -\sqrt{3}\,|x| \leq y \leq \sqrt{3}\,|x|$$

e dire che l'insieme A delle soluzioni è

$$A = \Big\{x + iy : \quad -\sqrt{3}\,|x| \leq y \leq \sqrt{3}\,|x|, \quad (x, y) \neq (0,0)\Big\}.$$

Esercizio 3 [7 punti]
Studiare la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ \log\left[\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \alpha \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Da

$$\begin{aligned}
n \left\{ \log\left[\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \alpha \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} &= \\
= n \left\{ \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{12n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) + \alpha\frac{1}{n^2} + \alpha \cdot o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right\} &= \\
= (2\alpha + 1)\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)&,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato lo sviluppo di Mac Laurin del seno e della funzione composta

$$\log\left[\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \log\left[1 + \left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right] = \left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^4}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{24}\frac{1}{n^4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^4}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{12}\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

deduciamo che essa è una serie a segno definitivamente costante e, applicando il criterio del confronto asintotico, che converge se e solo se $2\alpha + 1 = 0$, i.e. $\alpha = -1/2$.

Esercizio 4 [8 punti]
Usando l'integrazione per parti, calcolare

$$\int \arctan\left(\frac{3}{x}\right)\,dx.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}
\int \arctan\left(\frac{3}{x}\right)\,dx &= x \arctan\left(\frac{3}{x}\right) + \int \frac{3}{x(1 + 9/x^2)}dx \\
&= x \arctan\left(\frac{3}{x}\right) + \int \frac{3x}{x^2 + 9}dx \\
&= x \arctan\left(\frac{3}{x}\right) + \frac{3}{2}\log(x^2 + 9) + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Facoltativo. Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x+1}{x^{2\alpha}}\right)\, dx$$

al variare di $\alpha > 0$.

Osserviamo che la funzione integranda è sempre $C^{(0)}((0, +\infty))$ e nonnegativa. All'estremo $x = 0$ l'integrando tende a $\pi/2$ dunque

$$\int_0^{1} \arctan\left(\frac{x+1}{x^{2\alpha}}\right)\, dx$$

è integrabile per ogni $\alpha > 0$. Studiamo l'integrabilità di

$$\int_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{x+1}{x^{2\alpha}}\right)\, dx$$

Se $\alpha \leq 1/2$ l'argomento dell' arcotangente è sempre > 1 per cui $\arctan\left(\frac{x+1}{x^{2\alpha}}\right) > \pi/4$. Ne consegue che l'integrale diverge. Se $\alpha > 1/2$, l'argomento di arcotangente tende a zero per $x \to +\infty$, e l'integrando è asintotico a $1/x^{2\alpha-1}$. Dunque l'ultimo integrale converge se e solo se $2\alpha - 1 > 1$, cioè $\alpha > 1$.

In conclusione

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x+1}{x^{2\alpha}}\right)\, dx$$

converge se e solo se $\alpha > 1$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 07.02.2022

TEMA 3

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \log\left(4|x| - x^2 + 5\right),$$

(i) determinarne il dominio naturale; determinarne la eventuale simmetria e il segno.

$$x \in \text{Dominio} \iff 4|x| - x^2 + 5 > 0 \quad \iff |x|^2 - 4|x| - 5 < 0 \;\; (\text{da } x^2 = |x|^2)$$

disequazione che è risolta da

$$|x| \in \,]-1, 5[\iff |x| \in [0, 5[\iff x \in \,]-5, 5[\,.$$

Dunque Dominio$= \,]-5, 5[$
La funzione è chiaramente pari.
La funzione è continua perché composta di funzioni continue.

In alternativa si sarebbe potuto anche argomentare come segue.

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(4x - x^2 + 5\right) & \forall x \geq 0 \\ \log\left(-4x - x^2 + 5\right) & \forall x < 0 \end{cases}$$

Si osserva che f è pari, e si limita lo studio a $x \geq 0$. Dunque $x \in$ Dominio e $x \geq 0$ se e solo se $4x - x^2 + 5 > 0$ e $x \geq 0$, cioè $x \in [0, 5[$. Poiché f è pari, risulta

$$\text{Dominio} =] - 5, 5[$$

.

Inoltre

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x - x^2 + 5 \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff x \in \left[0, 2 + 2\sqrt{2}\right]$$

Per simmetria si conclude che

$$f(x) \geq 0 \iff x \in \left[-2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}\right].$$

Calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to 5} f(x) = -\infty \quad \text{che per simmetria implica} \quad \lim_{x \to -5} f(x) = -\infty$$

così in 5 e -5 ci sono due asintoti verticali.
(ii) studiarne la derivabilità e calcolarne la derivata prima; studiarne gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo e di minimo sia relatvi che assoluti:

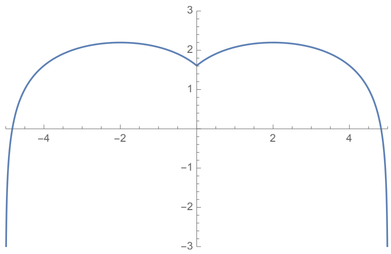
$$\begin{cases} x > 0 \\ f'(x) = \dfrac{4-2x}{4x-x^2+5} \geq 0 \end{cases} \iff x \in \,]0,2[\,.$$

Inoltre $f'(x) = 0,\ x > 0$ se e solo se $x = 2$. Poichè f è continua nel suo dominio, se ne deduce che f è strettamente crescente in $[0,2]$, strettamente decrescente in $[2,5[$, e ha un punto di massimo relativo in $x = 2$.

Per simmetria si ha anche che f è strettamente decrescente in $[-2,0]$, strettamente crescente in $]-5,-2[$, e ha un punto di massimo relativo in $x = -2$.

In particolare $x = 2, -2$ sono punti di massimo assoluto.
Per $x = 0$ (la funzione è continua): $f(0) = \log 5$. $x = 0$ è dunque punto di minimo relativo (ma non assoluto perché f tende a $-\infty$ agli estremi).
Si ha inoltre $\lim_x \to 0^+ f'(x) = 4/5 = f'_+(0)$, che per simmetria implica $f'_-(0) = -4/5$, Dunque 0 è un punto angoloso.

(iii) abbozzarne il grafico.



Esercizio 2 [7 punti] Determinare l'insieme A dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

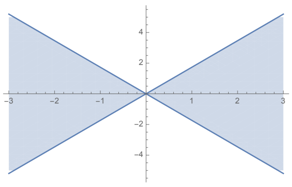
$$\frac{|z - 3\mathcal{R}e(z)|^2}{|z|^2 + \mathcal{I}m(z)^2} \geq 1$$

e disegnarlo nel piano complesso.

Se scriviamo $z = x + iy$, la disequazione diventa

$$\frac{|-2x + yi|^2}{x^2 + 2y^2} = \frac{4x^2 + y^2}{x^2 + 2y^2} \geq 1$$

Il numeratore è 0 se e e solo se $(x, y) = (0, 0)$. Negli altri punti è positivo, perciò per $(x, y) \neq (0, 0)$ la



disequazione è equivalente a

$$4x^2 + y^2 \geq x^2 + 2y^2 \iff$$
$$3x^2 - y^2 = (\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}x + y) \geq 0 \iff$$
$$x + iy \in \left\{x + iy,\ y \geq \sqrt{3}x,\ y \leq -\sqrt{3}x\right\} \cup \left\{x + iy,\ y \leq \sqrt{3}x,\ y \geq -\sqrt{3}x\right\}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

In alternativa, si poteva anche osservare che la disequazione è equivalente a

$$3x^2 - y^2 \geq 0 \iff$$

$$y^2 \leq 3\,x^2 \iff -\sqrt{3}\,|x| \leq y \leq \sqrt{3}\,|x|$$

e dire che l'insieme A delle soluzioni è

$$A = \left\{ x + iy : \quad -\sqrt{3}\,|x| \leq y \leq \sqrt{3}\,|x|, \quad (x,y) \neq (0,0) \right\}.$$

Esercizio 3 [7 punti]
Studiare la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ \alpha \sinh\left(\frac{1}{n^2}\right) - \log\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] \right\}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Da

$$\begin{aligned}
n \left\{ \alpha \sinh\left(\frac{1}{n^2}\right) - \log\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] \right\} &= \\
= n \left\{ \alpha \frac{1}{n^2} + \alpha \cdot o\left(\frac{1}{n^4}\right) + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{12n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right\} &= \\
= (2\alpha + 1)\frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato lo sviluppo di Mac Laurin di sinh e della funzione composta

$$\log\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \log\left[1 + \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right] = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^4}\right) =$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{24}\frac{1}{n^4} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^4}\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{12}\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

deduciamo che essa è una serie a segno definitivamente costante e, applicando il criterio del confronto asintotico, che converge se e solo se $2\alpha + 1 = 0$, i.e. $\alpha = -1/2$.

Esercizio 4 [8 punti]
Usando l'integrazione per parti, calcolare

$$\int_0^1 \arctan\left(\frac{4}{x}\right)\, dx.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}
\int \arctan\left(\frac{4}{x}\right)\, dx &= x \arctan\left(\frac{4}{x}\right) + \int \frac{4}{x(1 + 16/x^2)} dx \\
&= x \arctan\left(\frac{4}{x}\right) + \int \frac{4x}{x^2 + 16} dx \\
&= x \arctan\left(\frac{4}{x}\right) + 2\log(x^2 + 16) + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Facoltativo. Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x+1}{x^{3\alpha}}\right)\, dx$$

al variare di $\alpha > 0$.

Osserviamo che la funzione integranda è sempre $C^{(0)}((0,+\infty))$ e nonnegativa. All'estremo $x = 0$ l'integrando tende a $\pi/2$ dunque

$$\int_0^{1} \arctan\left(\frac{x+1}{x^{3\alpha}}\right)\, dx$$

è integrabile per ogni $\alpha > 0$. Studiamo l'integrabilità di

$$\int_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{x+1}{x^{3\alpha}}\right)\, dx$$

Se $\alpha \leq 1/3$ l'argomento dell' arcotangente è sempre > 1 per cui $\arctan\left(\frac{x+1}{x^{3\alpha}}\right) > \pi/4$. Ne consegue che l'integrale diverge. Se $\alpha > 1/3$, l'argomento di arcotangente tende a zero per $x \to +\infty$, e l'integrando è asintotico a $1/x^{3\alpha-1}$. Dunque l'ultimo integrale converge se e solo se $3\alpha - 1 > 1$, cioè $\alpha > 2/3$.

In conclusione

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x+1}{x^{2\alpha}}\right)\, dx$$

converge se e solo se $\alpha > 2/3$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 07.02.2022

TEMA 4

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \log\left(3|x| - x^2 + 4\right),$$

(i) determinarne il dominio naturale; determinarne la eventuale simmetria e il segno.

$$x \in \text{Dominio} \iff 3|x| - x^2 + 4 > 0 \quad \iff |x|^2 - 3|x| - 4 < 0 \text{ (da } x^2 = |x|^2)$$

disequazione che è risolta da

$$|x| \in \left]-1, 4\right[\iff |x| \in [0, 4[\iff x \in \left]-4, 4\right[.$$

Dunque Dominio= $]-4, 4[$
La funzione è chiaramente pari.
La funzione è continua perché composta di funzioni continue.

In alternativa si sarebbe potuto anche argomentare come segue.

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(3x - x^2 + 4\right) & \forall x \geq 0 \\ \log\left(-3x - x^2 + 4\right) & \forall x < 0 \end{cases}$$

Si osserva che f è pari, e si limita lo studio a $x \geq 0$. Dunque $x \in$ Dominio e $x \geq 0$ se e solo se $3x - x^2 + 4 > 0$ e $x \geq 0$, cioè $x \in [0, 4[$. Poiché f è pari, risulta

$$\text{Dominio} =]-4, 4[$$

.

Inoltre

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - x^2 + 4 \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff x \in \left[0, \frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right].$$

Per simmetria si conclude che

$$f(x) \geq 0 \iff x \in \left[-\frac{3 + \sqrt{21}}{2}, \frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right].$$

Calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = -\infty \quad \text{che per simmetria implica} \quad \lim_{x \to -4} f(x) = -\infty$$

così in 4 e -4 ci sono due asintoti verticali.

(ii) studiarne la derivabilità e calcolarne la derivata prima; studiarne gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo e di minimo sia relatvi che assoluti:

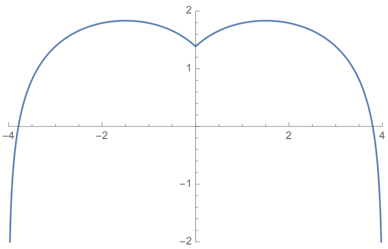
$$\begin{cases} x > 0 \\ f'(x) = \dfrac{3-2x}{4x-x^2+5} \geq 0 \end{cases} \iff x \in \,]0, 3/2[\,.$$

Inoltre $f'(x) = 0,\ \ x > 0$ se e solo se $x = 3/2$. Poichè f è continua nel suo dominio, se ne deduce che f è strettamente crescente in $[0, 3/2]$, strettamente decrescente in $[3/2, 4[$, e ha un punto di massimo relativo in $x = 3/2$.

Per simmetria si ha anche che f è strettamente decrescente in $[-3/2, 0]$, strettamente crescente in $]-4, -3/2[$, e ha un punto di massimo relativo in $x = -3/2$.

In particolare $x = 2, -2$ sono punti di massimo assoluto.
Per $x = 0$ (la funzione è continua): $f(0) = \log 4$. $x = 0$ è dunque punto di minimo relativo (ma non assoluto perché f tende a $-\infty$ agli estremi).
Si ha inoltre $\lim_x \to 0^+ f'(x) = 3/4 = f'_+(0)$, che per simmetria implica $f'_-(0) = -3/4$, Dunque 0 è un punto angoloso.

(iii) abbozzarne il grafico.



Esercizio 2 [7 punti] Determinare l'insieme A dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

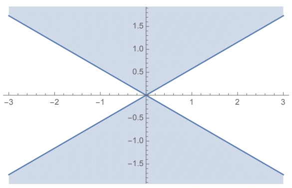
$$\frac{|z - 3i\mathcal{I}m(z)|^2}{|z|^2 + \mathcal{R}e(z)^2} \geq 1$$

e disegnarlo nel piano complesso.

Se scriviamo $z = x + iy$, la disequazione diventa

$$\frac{|x - 2yi|^2}{2x^2 + y^2} = \frac{x^2 + 4y^2}{2x^2 + y^2} \geq 1$$

Il numeratore è 0 se e e solo se $(x, y) = (0, 0)$. Negli altri punti è positivo, perciò per $(x, y) \neq (0, 0)$ la



disequazione è equivalente a

$$x^2 + 4y^2 \geq 2x^2 + y^2 \iff$$

$$3y^2 - x^2 = (\sqrt{3}y - x)(\sqrt{3}y + x) \geq 0 \iff$$

$$x + iy \in \left\{x + iy,\ \ y \leq x/\sqrt{3},\ \ y \leq -x/\sqrt{3}\right\} \cup \left\{x + iy,\ \ y \geq x/\sqrt{3},\ \ y \geq -x/\sqrt{3}\right\}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

In alternativa, si poteva anche osservare che la disequazione è equivalente a

$$3y^2 - x^2 \geq 0 \iff$$

$$y^2 \geq \frac{1}{3}\,x^2 \iff y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\,|x| \quad \text{oppure} \quad y \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}\,|x|$$

e dire che l'insieme A delle soluzioni è

$$A = \left\{x + iy : \quad y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\,|x|, \quad (x,y) \neq (0,0)\right\} \cup \left\{x + iy, : \quad y \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}\,|x|, \quad (x,y) \neq (0,0)\right\}.$$

Esercizio 3 [7 punti]
Studiare la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left\{\log\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] - \alpha\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Da

$$\begin{aligned} n\left\{\log\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] - \alpha\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} &= \\ = n\left\{-\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{12n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) - \alpha\frac{1}{n^2} + \alpha\cdot o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right\} &= \\ = -(2\alpha+1)\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)&, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato lo sviluppo di Mac Laurin del seno e della funzione composta

$$\log\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \log\left[1 + \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right] = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^4}\right) =$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{24}\frac{1}{n^4} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^4}\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{12}\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

deduciamo che essa è una serie a segno definitivamente costante e, applicando il criterio del confronto asintotico, che converge se e solo se $2\alpha + 1 = 0$, i.e. $\alpha = -1/2$.

Esercizio 4 [8 punti]
Usando l'integrazione per parti, calcolare

$$\int \arctan\left(\frac{5}{x}\right)\,dx.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \int \arctan\left(\frac{5}{x}\right)\,dx &= x\arctan\left(\frac{5}{x}\right) + \int \frac{5}{x(1+25/x^2)}dx \\ &= x\arctan\left(\frac{5}{x}\right) + \int \frac{5x}{x^2+25}dx \\ &= x\arctan\left(\frac{5}{x}\right) + \frac{5}{2}\log(x^2+25) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Facoltativo. Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x^2+1}{x^\alpha}\right)\,dx$$

al variare di $\alpha > 0$.

Osserviamo che la funzione integranda è sempre $C^{(0)}((0,+\infty))$ e nonnegativa. All'estremo $x = 0$ l'integrando tende a $\pi/2$ dunque

$$\int_0^{1} \arctan\left(\frac{x^2+1}{x^\alpha}\right)\,dx$$

è integrabile per ogni $\alpha > 0$. Studiamo l'integrabilità di

$$\int_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{x^2+1}{x^\alpha}\right)\,dx$$

Se $\alpha \leq 2$ l'argomento dell' arcotangente è sempre > 1 per cui $\arctan\left(\frac{x^2+1}{x^\alpha}\right) > \pi/4$. Ne consegue che l'integrale diverge. Se $\alpha > 2$, l'argomento di arcotangente tende a zero per $x \to +\infty$, e l'integrando è asintotico a $1/x^{\alpha-2}$. Dunque l'ultimo integrale converge se e solo se $\alpha - 2 > 1$, cioè $\alpha > 3$.

In conclusione

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x^3+1}{x^\alpha}\right)\,dx$$

converge se e solo se $\alpha > 3$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.