ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 01.07.2022

TEMA 1: soluzione

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = |x-2|\, e^{\frac{1}{(x-2)^2}}.$$

(i) determinare il dominio di f ed il segno di f;

$$Dominio = \mathbb{R}\backslash\{2\}$$

e

$$f(x) > 0$$

per ogni $x \in Dominio$, perché prodotto di due funzioni positive.

(ii) calcolare i limiti significativi di f;

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x-2|\, e^{\frac{1}{(x-2)^2}} = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2\pm} |x-2|\, e^{\frac{1}{(x-2)^2}} \underset{y=\frac{1}{(x-2)^2}}{=} \lim_{y\to+\infty} y^{-\frac{1}{2}}\, e^{y} = +\infty$$

(iii) calcolare la derivata di f, discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto; Per ogni $x > 2$

$$\frac{df}{dx}(x) = e^{\frac{1}{(x-2)^2}} - 2(x-2)e^{\frac{1}{(x-2)^2}}\frac{1}{(x-2)^3} = e^{\frac{1}{(x-2)^2}}\Big(1 - \frac{2}{(x-2)^2}\Big) = e^{\frac{1}{(x-2)^2}} \cdot \frac{x^2-4x+2}{(x-2)^2}$$

Analogamente, Per ogni $x < 2$

$$\frac{df}{dx}(x) = -\Big(e^{\frac{1}{(x-2)^2}} - 2(x-2)e^{\frac{1}{(x-2)^2}}\frac{1}{(x-2)^3}\Big) = -e^{\frac{1}{(x-2)^2}}\Big(1 - \frac{2}{(x-2)^2}\Big) = -e^{\frac{1}{(x-2)^2}} \cdot \frac{x^2-4x+2}{(x-2)^2}$$

Dunque, poiché $x^2-4x+2 > 0$ se e solo se $x > 2+\sqrt{2}$ o $x < 2-\sqrt{2}$, si ha che $\frac{df}{dx}(x) > 0$ se e solo se $x > 2+\sqrt{2}$ o $2-\sqrt{2} < x < 2$, mentre $\frac{df}{dx}(2+\sqrt{2}) = \frac{df}{dx}(2-\sqrt{2}) = 0$.

Inoltre $f(2+\sqrt{2}) = f(2-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

Dunque la funzione è strettamente crescente in $[2-\sqrt{2}, 2[$ e in $[2+\sqrt{2}, +\infty[$, è strettamente decrescente in $]-\infty, 2-\sqrt{2}[$ e in $]2, 2+\sqrt{2}]$, cosicché in $2+\sqrt{2}$ e in $2-\sqrt{2}$ essa ha due minimi relativi che sono anche assoluti. Inoltre la funzione è illimitata superiormente.

(iv) calcolare eventuali asintoti di f;

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)\, e^{\frac{1}{(x-2)^2}}}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2-x)\,e^{\frac{1}{(x-2)^2}}}{x}=-1\cdot 1=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=(x-2)\,e^{\frac{1}{(x-2)^2}}-x=$$

Utilizzo lo sviluppo di e^y per $y\to 0$, con $y=\frac{1}{(x-2)^2}$

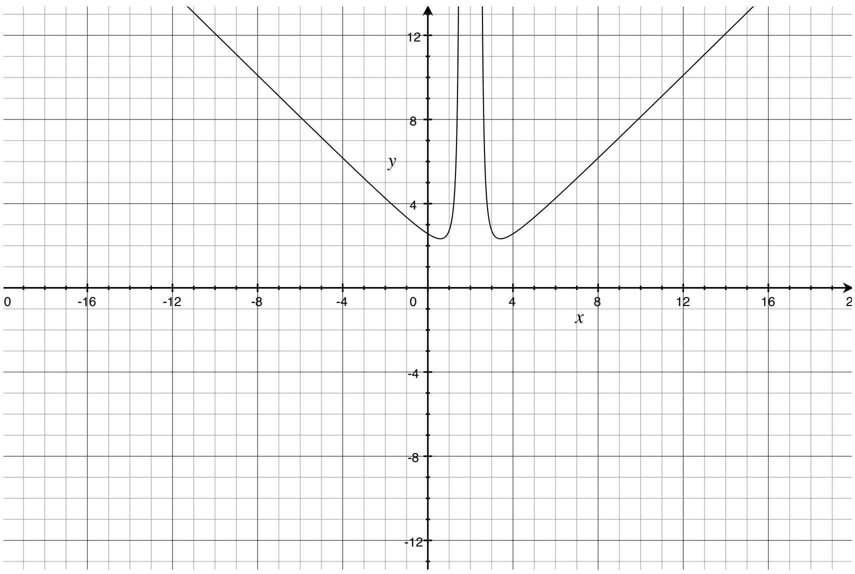
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x-2+\frac{x-2}{(x-2)^2}+o\left(\frac{1}{(x-2)}\right)-x\right)=-2$$

Analogamente

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=(2-x)\,e^{\frac{1}{(x-2)^2}}-x=\lim_{x\to+\infty}\left(2-x+\frac{2-x}{(x-2)^2}+o\left(\frac{1}{(x-2)}\right)+x\right)=2$$

In conclusione, per $x\to+\infty$, si ha l' asintoto $y=-2+x$ e per $x\to-\infty$, si ha l' asintoto $y=2-x$

(v) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.



Esercizio 2 [8 punti] Determinare in forma algebrica le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^4+(-2-2i)z^2+4i=0.$$

Pongo $w:=z^2$. L'equazione per w è

$$w^2+(-2-2i)w+4i=0$$

le cui soluzioni sono

$$w_1=1+i+r_1,\ \ w_2=1+i+r_2$$

dove r_1,r_2 sono le radici quadrate di $(1+i)^2-4i=1-2i-1=-2i$. Cioè $r_1=-1+i$ e $r_2=1-i$, da cui $w_1=2i,w_2=2$ per cui le soluzioni si trovano unendo le soluzioni $z^2=2i$ a quelle di $z^2=2$. Ne segue (con il solito de Moivre) che le soluzioni sono

$$z_1=1+i,z_2=-1-i,z_3=\sqrt{2},\ \ z_4=-\sqrt{2}$$

Esercizio 3 [7 punti]
(i) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{\alpha x} - 1}{x^2}.$$

Utilizzando il principio di sostituzione nel prodotto/quoziente di limiti con funzioni asintotiche, osservando che, per $x \to 0^+$, $e^{\alpha x \log(1+x)} - 1 \sim \alpha x \log(1+x) \sim \alpha x^2$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{\alpha x} - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\log(1+x)^{\alpha x}} - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha x \log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha x^2}{x} = \alpha.$$

Esercizio 4 [8 punti] (i) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\sqrt{t}}{1+t}\, dt.$$

Pongo $y := \sqrt{t}$, per cui $dy = \frac{1}{2}(\sqrt{t})^{-1}dt = \frac{1}{2}y^{-1}dt$, cioè $dt = 2ydy$. Si ha dunque

$$\int \frac{\sqrt{t}}{1+t}\, dt = 2\int \frac{y^2}{1+y^2} dy = 2\left[\int \frac{1+y^2}{1+y^2} dy [- \int \frac{1}{1+y^2} dy\right] =$$
$$2\left(y - \arctan(y)\right) + c = 2\left(\sqrt{t} - \arctan(\sqrt{t})\right) + c, \qquad \forall c \in \mathbb{R}.$$

(ii) Discutere la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t^\alpha}\, dt$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per $t \to 0+$, se $\alpha \geq 0$ la funzione integranda è continua nello 0. Se invece $\alpha < 0$ la funzione è prolungabile per continuità, uguale a 0 nello 0. Dunque non ci sono problemi di integrabilità in un intorno destro di 0.

Per $t \to +\infty$, se $\alpha < 0$, $\frac{\sqrt{t}}{1+t^\alpha} \sim \sqrt{t}$ che non è integrabile per $t \to +\infty$. Se $\alpha = 0$ $\frac{\sqrt{t}}{1+t^\alpha} \sim \frac{\sqrt{t}}{2}$ che, similmente, non è integrabile per $t \to +\infty$. Se $\alpha > 0$, $\frac{\sqrt{t}}{1+t^\alpha} \sim \frac{1}{t^{\alpha - \frac{1}{2}}}$, che per $t \to +\infty$ è integrabile se e solo se $\alpha - \frac{1}{2} > 1$ cioé, se e solo se $\alpha > \frac{3}{2}$.