ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 12.09.2022

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{\sin x}\right),$$

(i) individuarne il dominio naturale, studiarne la eventuale periodicità e l'eventuale simmetria, calcolarne il segno, calcolare i limiti agli estremi del dominio;
(ii) studiare la derivabilità di f sul suo dominio, calcolare la derivata prima, individuare gli intervalli di monotonia e i punti di minimo e di massimo, sia relativi che assoluti, ed eventuali estremo inferiore e superiore;
(iii) abbozzare il grafico di f.

SOLUZIONE

(i)

$$\text{Dominio naturale} = D := \{x : \ \sin x \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{n\pi, \ \ n \in \mathbb{Z}\}$$

Poiché sin è periodica di perido 2π, anche f lo è. Inoltre sin è dispari, così anche f lo è; in altre parole:

$$f(-x) = \arctan\left(\frac{1}{\sin(-x)}\right) = \arctan\left(-\frac{1}{\sin x}\right) = -f(x) \qquad \forall x \in D.$$

È dunque sufficiente studiare la funzione nel sottodominio $]0, \pi[$, per poi estenderla per antisimmetria e periodicità.

Si ha $f(x) \neq 0 \ \forall x \in D$, e

$$f(x) > 0 \ \ (\& \ \ x \in]0,\pi[) \iff \frac{1}{\sin x} > 0 \ \ (\& \ \ x \in]0,\pi[) \iff x \in]0,\pi[$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \arctan\left(\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{y\to+\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to \pi-} f(x) = \arctan\left(\lim_{x\to \pi-} \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{y\to+\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$$

(ii) Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) = -\frac{\cos x}{1+\sin^2(x)} \qquad \forall x \in D.$$

Pertanto la funzione è derivabile (e dunque continua) in ogni punto del dominio.

Poichè f (in $]0,\pi[$) ammette limiti destro in 0 e sinistro in π finiti, calcoliamo gli attacchi della derivata (in $]0,\pi[$), cioè:

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} -\frac{\cos x}{1+\sin^2(x)} = -1, \qquad \lim_{x\to \pi-} f'(x) = 1.$$

Da ciò si deduce che $\lim_{x\to 2n\pi+} f'(x) = -1$ e $\lim_{x\to(2n+1)\pi-} f'(x) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

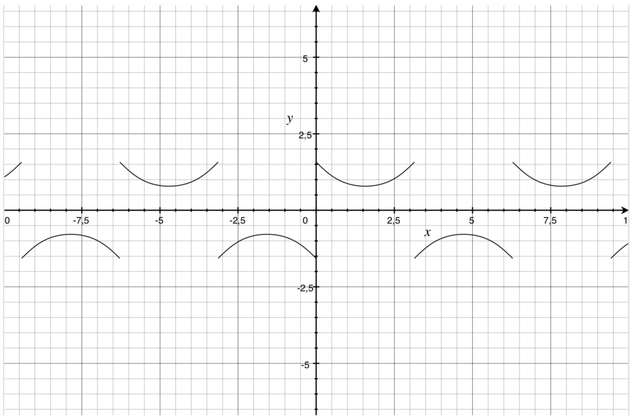
Da

$$f'(x) \geq 0 \ , \ \ (\& \ \ x \in]0,\pi[) \iff \cos(x) \leq 0 \ \ (\& \ \ x \in]0,\pi[) \iff x \in [\frac{\pi}{2},\pi[$$

e $f'(x) = 0$, $(\& \ \ x \in]0,\pi[) \iff x = \frac{\pi}{2}$, si ha che la funzione è strettamente decrescente negli intervalli $]0, \frac{1}{2}\pi] + 2n\pi =]2n\pi, (\frac{1}{2} + 2n)\pi]$, $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi[+2n\pi = [(\frac{3}{2} + 2n)\pi, 4n\pi[$ e strettamente crescente negli intervalli $[\frac{1}{2}\pi, \pi[+2n\pi = [(\frac{1}{2} + 2n)\pi, (1 + 2n)\pi[$, $]\pi, \frac{3}{2}\pi] + 2n\pi =](2n + 1)\pi, (\frac{3}{2} + 2n)\pi]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. In particolare, tutti i punti $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, sono punti di minimo relativo, con $f(x) = \pi/4$, mentre i punti $x = \frac{\pi}{2} + (2n + 1)\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, sono di massimo relativo con $f(x) = -\pi/4$.

Non ci sono punti di massimo assoluto perché dai limiti si deduce che $\sup_{x\in D} f(x) = \frac{\pi}{2}$ e $\inf_{x\in D} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, e non ci sono punti del dominio in cui la funzione prende i valori $\pm\frac{\pi}{2}$.

(iii) Grafico di f:



Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della disequazione

$$\left|\frac{z-i}{z-1}\right| \geq 1$$

e le si disegnino nel piano complesso.

SOLUZIONE Ponendo $z = x + iy$, si ha

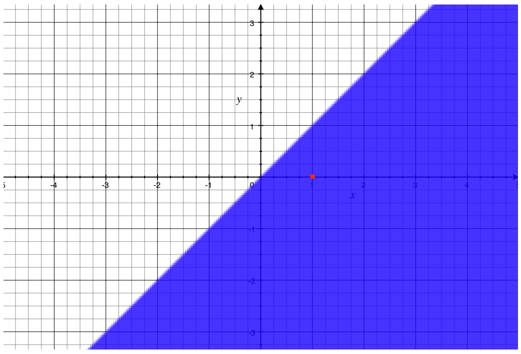
$$\left|\frac{z-i}{z-1}\right| \geq 1 \iff \frac{|z-i|}{|z-1|} \geq 1, \ \ z \neq 1 \iff |z-i| \geq |z-1|, \ \ z \neq 1$$
$$\iff \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \geq \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, \ \ (x,y) \neq (1,0)$$
$$\iff -2y \geq -2x \ \ (x,y) \neq (1,0) \iff y \leq x \ \ (x,y) \neq (1,0).$$

Esercizio 3 [8 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3}{\arctan(x^2 + 4x^3)}$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

SOLUZIONE: Esaminiamo il numeratore e il denominatore separatamente.



$$
\begin{aligned}
Num &:= \sin x - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3 \\
&= (1-\alpha)x + \frac{1}{6}(\alpha - 1)x^3 + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \qquad \text{per } x \to 0^+ \\
Denom &:= \arctan(x^2 + 4x^3) = x^2 + 4x^3 + o(x^2 + 4x^3) \\
&= (\text{poiché } x^2 + 4x^3 \sim x^2 \text{ per } x \to 0^+) \\
&= x^2 + o(x^2) \text{per } x \to 0^+.
\end{aligned}
$$

Perciò

$$
\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3}{\arctan(x^2 + 4x^3)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\alpha)x + \frac{1}{6}(\alpha - 1)x^3 + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{x^2 + o(x^2)}.
$$

Dunque, utilizzando il Principio di Sostituzione degli Infinitesimi,

se $\alpha = 1$,

$$
\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3}{\arctan(x^2 + 4x^3)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^5}{5!}}{x^2} = 0,
$$

se $\alpha > 1$

$$
\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3}{\arctan(x^2 + 4x^3)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\alpha)x}{x^2} = -\infty,
$$

se $\alpha < 1$

$$
\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3}{\arctan(x^2 + 4x^3)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\alpha)x}{x^2} = +\infty
$$

Esercizio 4 [8 punti] (a) Calcolare l'integrale definito:

$$
\int_{\log 4}^{\log 6} \frac{e^x}{(e^x - 2)(e^x - 1)}\, dx
$$

(b) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza di

$$
\int_{\log 4}^{+\infty} \frac{e^x}{(e^x - 2)^\alpha (e^x - 1)}\, dx.
$$

SOLUZIONE

(a) Calcoliamo l'integrale indefinito con sostituzione $y = e^x \implies dy = e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{(e^x-2)(e^x-1)}\,dx = \int \frac{dy}{(y-2)(y-1)} = \int \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y-1}\right) dy = \log|y-2| - \log|y-1| + cost =$$

$$= \log\left(\frac{|y-2|}{|y-1|}\right) + cost = \log\left(\frac{|e^x-2|}{|e^x-1|}\right) + cost$$

dove il secondo passaggio si ottiene risolvendo il sistema in A, B

$$\frac{1}{(y-2)(y-1)} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{y-1}, \quad y \in \mathbb{R},$$

che dà $A = 1$ e $B = -1$. Dunque

$$\int_{\log 4}^{\log 6} \frac{e^x}{(e^x-2)(e^x-1)}\,dx = \left[\log\left(\frac{|e^x-2|}{|e^x-1|}\right)\right]_{\log 4}^{\log 6} = \log\left(\frac{4}{5}\right) - \log\left(\frac{2}{3}\right) = \log\left(\frac{6}{5}\right) = \log 6 - \log 5$$

(b) Da

$$f(x) = \frac{e^x}{(e^x-2)^\alpha(e^x-1)} \sim \frac{e^x}{e^{\alpha x+1}} = \frac{1}{e^{\alpha x}}$$

si deduce che la funzione integranda f è definitivamente positiva e che, se $\alpha \le 0$, l'integrale diverge (perchè il limite di f a $+\infty$ esiste ma non è nullo[1]). Mentre se $\alpha > 0$ si ha che l'integrale converge, in quanto $f(x) = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$ per ogni $\beta > 1$ per $x \to +\infty$ e $\int_{\log 4}^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta}$ converge. Infatti, per $\alpha > 0$, dalla gerarchia degli infiniti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{-\beta}} = \lim_{x\to+\infty} x^\beta \frac{1}{e^{\alpha x}} = 0$$

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

[1] Attenzione, potrebbe convergere se il limite di f a $+\infty$ non esistesse