ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 23.01.2023

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 9) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$$

(a) determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie (non è richiesto lo studio del segno);

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) studiare la derivabilità di f nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 7) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$z^3 + \alpha z^2 + iz = -\alpha i \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

(a) Determinare per quale valore del parametro reale α questa equazione ha $z_0 := 4$ come soluzione;

(b) Per il valore di α determinato nel punto a), trovare le altre soluzioni dell'equazione.

Esercizio 3 (punti 8) (a) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x\to 0^+} [1 - \arcsin x]^{\frac{1}{x}}.$$

(b) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri la famiglia di funzioni

$$f_\alpha(x) = (x-2)\arctan(x^\alpha)$$

(a) Si calcoli

$$\int f_1(x)\,dx$$

(b) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

è convergente.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6),$$
$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad \forall n \geq 0$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 23.01.2023

TEMA 2

Esercizio 1 (punti 9) Si consideri la funzione

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}$$

(a) determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie (non è richiesto lo studio del segno);

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) studiare la derivabilità di f nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 7) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$z^3 + \alpha z^2 + iz = -\alpha i \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

(a) Determinare per quale valore del parametro reale α questa equazione ha $z_0 := -4$ come soluzione;

(b) Per il valore di α determinato nel punto a), trovare le altre soluzioni dell'equazione.

Esercizio 3 (punti 8) (a) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x \to 0^+} [1 - \sinh(x)]^{\frac{1}{x}}.$$

(b) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri la famiglia di funzioni

$$f_\alpha(x) = (x+1)\arctan(x^\alpha)$$

(a) Si calcoli

$$\int f_1(x)\,dx$$

(b) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

è convergente.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$
$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad \forall n \geq 0$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 23.01.2023

TEMA 3

Esercizio 1 (punti 9) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$$

(a) determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie (non è richiesto lo studio del segno);

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) studiare la derivabilità di f nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 7) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$z^3 + \alpha z^2 + iz = -\alpha i \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

(a) Determinare per quale valore del parametro reale α questa equazione ha $z_0 := 3$ come soluzione;

(b) Per il valore di α determinato nel punto a), trovare le altre soluzioni dell'equazione.

Esercizio 3 (punti 8) (a) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x\to 0^+} [1 - \sin(x)]^{\frac{1}{x}}.$$

(b) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri la famiglia di funzioni

$$f_\alpha(x) = (x-1)\arctan(x^\alpha)$$

(a) Si calcoli

$$\int f_1(x)\,dx$$

(b) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

è convergente.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad \forall n \geq 0$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 23.01.2023

TEMA 4

Esercizio 1 (punti 9) Si consideri la funzione

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x}$$

(a) determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie (non è richiesto lo studio del segno);

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) studiare la derivabilità di f nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 7) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$z^3 + \alpha z^2 + iz = -\alpha i \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

(a) Determinare per quale valore del parametro reale α questa equazione ha $z_0 := -3$ come soluzione;

(b) Per il valore di α determinato nel punto a), trovare le altre soluzioni dell'equazione.

Esercizio 3 (punti 8) (a) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x\to 0^+} [1 - \tan(x)]^{\frac{1}{x}}.$$

(b) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \tan\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri la famiglia di funzioni

$$f_\alpha(x) = (x+2)\arctan(x^\alpha)$$

(a) Si calcoli

$$\int f_1(x)\,dx$$

(b) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

è convergente.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6),$$

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad \forall n \geq 0$$