

**ANALISI MATEMATICA 1**  
**Area dell'Ingegneria dell'Informazione**

**Appello del 13.02.2023**

**TEMA 1**

**Esercizio 1 (8 punti)** Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2(\log|x| - 4)$$

- (a) determinare il dominio di  $f$ , il segno di  $f$  ed eventuali simmetrie;
- (b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuità ed asintoti agli estremi del dominio;
- (c) studiare la derivabilità di  $f$  nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di  $f$  e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di  $f$  ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di  $f$ .

**Esercizio 2 (8 punti)** Trovare in  $\mathbb{C}$  le soluzioni della seguente equazione ed esprimerle in forma algebrica:

$$\sqrt{3}z^2 - 2z - i = 0.$$

**Esercizio 3 (8 punti)** Data la successione

$$a_n = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n^a}\right)} \left[ 1 + \frac{1}{3n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/3} \right],$$

- (a) determinare l'ordine di infinito o infinitesimo di  $(a_n)_n$  per ogni  $a > 0$ ;
- (b) discutere il carattere della serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  per ogni  $a > 0$ .

**Esercizio 4 (8 punti)** Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(1-x)x^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

- (a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{1/4} f_{1/2}(x) dx$$

- (b) Studiare, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{1/4} f_\alpha(x) dx.$$

Tempo: due ore e mezza (comprendive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

*Sviluppi di Mac Laurin.*

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots + \binom{a}{n}x^n + o(x^n) \quad \forall n \geq 0$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \forall n \geq 0$$

**ANALISI MATEMATICA 1**  
**Area dell'Ingegneria dell'Informazione**

**Appello del 13.02.2023**

**TEMA 2**

**Esercizio 1 (8 punti)** Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2(2 \log |x| - 3)$$

- (a) determinare il dominio di  $f$ , il segno di  $f$  ed eventuali simmetrie;
- (b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuità ed asintoti agli estremi del dominio;
- (c) studiare la derivabilità di  $f$  nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di  $f$  e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di  $f$  ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di  $f$ .

**Esercizio 2 (8 punti)** Trovare in  $\mathbb{C}$  le soluzioni della seguente equazione ed esprimerle in forma algebrica:

$$\sqrt{3}z^2 - 2z + i = 0.$$

**Esercizio 3 (8 punti)** Data la successione

$$a_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{1}{n^a}\right)} \left[ \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-1/2} - 1 + \frac{1}{n} \right],$$

- (a) determinare l'ordine di infinito o infinitesimo di  $(a_n)_n$  per ogni  $a > 0$ ;
- (b) discutere il carattere della serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  per ogni  $a > 0$ .

**Esercizio 4 (8 punti)** Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(9-x)x^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

- (a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 f_{1/2}(x) dx$$

- (b) Studiare, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 f_\alpha(x) dx.$$

Tempo: due ore e mezza (comprehensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

*Sviluppi di Mac Laurin.*

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots + \binom{a}{n}x^n + o(x^n) \quad \forall n \geq 0$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \quad \forall n \geq 0$$

**ANALISI MATEMATICA 1**  
**Area dell'Ingegneria dell'Informazione**

**Appello del 13.02.2023**

**TEMA 3**

**Esercizio 1 (8 punti)** Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2(3 \log |x| - 2)$$

- (a) determinare il dominio di  $f$ , il segno di  $f$  ed eventuali simmetrie;
- (b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuità ed asintoti agli estremi del dominio;
- (c) studiare la derivabilità di  $f$  nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di  $f$  e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di  $f$  ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di  $f$ .

**Esercizio 2 (8 punti)** Trovare in  $\mathbb{C}$  le soluzioni della seguente equazione ed esprimerle in forma algebrica:

$$\sqrt{3}z^2 + 2z - i = 0.$$

**Esercizio 3 (8 punti)** Data la successione

$$a_n = \frac{1}{\sinh\left(\frac{1}{n^a}\right)} \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/3} - 1 + \frac{1}{3n} \right],$$

- (a) determinare l'ordine di infinito o infinitesimo di  $(a_n)_n$  per ogni  $a > 0$ ;
- (b) discutere il carattere della serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  per ogni  $a > 0$ .

**Esercizio 4 (8 punti)** Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(4-x)x^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

- (a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 f_{1/2}(x) dx$$

- (b) Studiare, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 f_\alpha(x) dx.$$

Tempo: due ore e mezza (comprehensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

*Siluppi di Mac Laurin.*

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots + \binom{a}{n}x^n + o(x^n) \quad \forall n \geq 0$$

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \quad \forall n \geq 0$$

**ANALISI MATEMATICA 1**  
**Area dell'Ingegneria dell'Informazione**

**Appello del 13.02.2023**

**TEMA 4**

**Esercizio 1 (8 punti)** Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2(4 \log |x| - 1)$$

- (a) determinare il dominio di  $f$ , il segno di  $f$  ed eventuali simmetrie;
- (b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuità ed asintoti agli estremi del dominio;
- (c) studiare la derivabilità di  $f$  nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di  $f$  e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di  $f$  ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di  $f$ .

**Esercizio 2 (8 punti)** Trovare in  $\mathbb{C}$  le soluzioni della seguente equazione ed esprimerle in forma algebrica:

$$\sqrt{3}z^2 + 2z + i = 0.$$

**Esercizio 3 (8 punti)** Data la successione

$$a_n = \frac{1}{\arctan\left(\frac{1}{n^a}\right)} \left[ 1 + \frac{1}{n} - \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{1/2} \right],$$

- (a) determinare l'ordine di infinito o infinitesimo di  $(a_n)_n$  per ogni  $a > 0$ ;
- (b) discutere il carattere della serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  per ogni  $a > 0$ .

**Esercizio 4 (8 punti)** Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(16-x)x^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

- (a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 f_{1/2}(x) dx$$

- (b) Studiare, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 f_\alpha(x) dx.$$

Tempo: due ore e mezza (comprenditive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

*Sviluppo di Mac Laurin.*

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots + \binom{a}{n}x^n + o(x^n) \quad \forall n \geq 0$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \quad \forall n \geq 0$$