ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 13.02.2023

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2(\log |x| - 4)$$

(a) determinare il dominio di f, il segno di f ed eventuali simmetrie;

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La funzione f è pari e $f(x) = 0$ se e solo se $\log |x| = 4$ quindi per $x = \pm e^4$. Inoltre $f(x) > 0$ se e solo se $\log |x| > 4$ quindi per $x > e^4$ e $x < -e^4$.

(b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuità ed asintoti agli estremi del dominio;

Usando la sostituzione $y = \frac{1}{x}$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-\log y - 4}{y^2} = 0$$

grazie la gerarchia degli infiniti. Dato che f è pari anche $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ quindi f è prolungabile con continuità in $x = 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

quindi f non ha asintoti orizzontali o obliqui a $\pm\infty$.

(c) studiare la derivabilità di f nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

La funzione f è derivabile nel suo dominio in quanto composizione e prodotto di funzioni derivabili, inoltre

$$f'(x) = 2x(\log |x| - 4) + x = x(2\log |x| - 7).$$

Vale

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-2\log |y| - 7}{y} = 0 \qquad \text{per la gerarchia degli infiniti, dove } y = \frac{1}{x};$$

inoltre f' è dispari in quanto f è pari, quindi anche

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0.$$

Abbiamo $f'(x) = 0$ se e solo se $\log |x| = \frac{7}{2}$ quindi per $x = \pm e^{\frac{7}{2}}$. Se $x \in (0, +\infty)$ vale $f'(x) > 0$ quando $\log x > \frac{7}{2}$ quindi per $x \in (e^{\frac{7}{2}}, +\infty)$. Visto che f' è dispari, avremo $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in (-e^{\frac{7}{2}}, 0) \cup (e^{\frac{7}{2}}, +\infty)$. In particolare f è strettamente crescente negli insiemi $[-e^{\frac{7}{2}}, 0)$ e $[e^{\frac{7}{2}}, +\infty)$ e

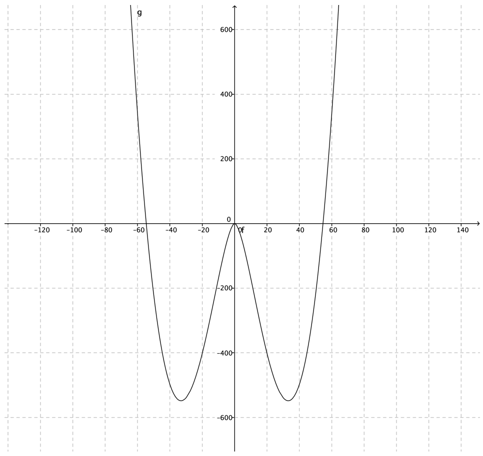

Figura 1: Grafico di f

strettamente decrescente negli insiemi $(-\infty, -e^{\frac{7}{2}}]$ e $(0, e^{\frac{7}{2}}]$. I punti $\pm e^{\frac{7}{2}}$ sono punti di minimo assoluto e la funzione assume il valore minimo $-\frac{e^7}{2}$, mentre $\sup f = +\infty$.

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Vedere Figura 1.

Esercizio 2 (8 punti) Trovare in $\mathbb{C}$ le soluzioni della seguente equazione ed esprimerle in forma algebrica:

$$\sqrt{3}z^2 - 2z - i = 0.$$

Le due soluzioni sono

$$z_1 = \frac{2 + w_1}{2\sqrt{3}}, \qquad z_2 = \frac{2 + w_2}{2\sqrt{3}},$$

dove w_1, w_2 sono le due radici quadrate in $\mathbb{C}$ di $b^2 - 4ac = 4 + 4\sqrt{3}i$. Le due radici w_1 e w_2 hanno modulo $\sqrt{|4 + 4\sqrt{3}i|} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ e argomenti $\frac{1}{2}\mathrm{Arg}\left(4 + 4\sqrt{3}i\right) = \frac{\pi}{6}$ e $\frac{1}{2}\mathrm{Arg}\left(4 + 4\sqrt{3}i\right) + \pi = \frac{7\pi}{6}$. Quindi

$$w_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{6} + \sqrt{2}i \qquad \text{e} \qquad w_2 = -w_1 = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i.$$

Dunque le soluzioni sono

$$z_1 = \frac{2 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}i, \qquad z_2 = \frac{2 - \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}i.$$

Esercizio 3 (8 punti) Data la successione

$$a_n = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n^a}\right)}\left[1 + \frac{1}{3n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/3}\right],$$

(a) determinare l'ordine di infinito o infinitesimo di $(a_n)_n$ per ogni $a > 0$;

(b) discutere il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per ogni $a > 0$.

(a)

$$a_n = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n^a}\right)}\left[1 + \frac{1}{3n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/3}\right] = \frac{1 + \frac{1}{3n} - 1 - \frac{1}{3n} + \frac{1}{9n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^a} + o\left(\frac{1}{n^a}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{9n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^a} + o\left(\frac{1}{n^a}\right)} \sim \frac{1}{9n^{2-a}}$$

Pertanto se $0 < a < 2$ la successione ha ordine di infinitesimo $2 - a$, se $a > 2$ ha ordine di infinito $a - 2$, mentre se $a = 2$ non è né infinita né infinitesima.

(b) Per il punto (a), la successione (a_n) (definitivamente a termini di segno costante) è asintotica alla successione $\frac{1}{n^{2-a}}$, pertanto dal criterio del confronto asintotico $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2-a}}$ converge. Ciò accade se e solo se $2 - a > 1$, i.e. $a < 1$.

Esercizio 4 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(1-x)x^\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{1/4} f_{1/2}(x)\, dx$$

(b) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{1/4} f_\alpha(x)\, dx.$$

(a)

$$\int_0^{1/4} f_{1/2}(x)\, dx = \lim_{c\to 0+} \int_c^{1/4} \frac{1}{(1-x)x^{\frac{1}{2}}} dx \underset{y=x^{\frac{1}{2}}}{=} \lim_{c\to 0+} \int_{c^{\frac{1}{2}}}^{1/2} \frac{2y}{(1-y^2)y} dy =$$

$$\lim_{c\to 0+} \int_{c^{\frac{1}{2}}}^{1/2} \frac{2}{(1-y^2)} dy = \lim_{c\to 0+} \int_{c^{\frac{1}{2}}}^{1/2} \left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right) dy$$

$$\lim_{c\to 0+} \left(\log(1+1/2) - \log(1+c^{\frac{1}{2}}) - \log(1-1/2) + \log(1-c^{\frac{1}{2}})\right) =$$

$$= \log(1+1/2) - \log(1-1/2) = \log(3)$$

poiché

$$\frac{2}{(1-y^2)} = \frac{A}{(1+y)} + \frac{B}{(1-y)} = \frac{(A+B)+(B-A)y}{(1-y^2)} \qquad \forall y \in \mathbb{R} \iff A = B = 1$$

(b) Per $x \to 0$ si ha che $f_\alpha \sim \frac{1}{x^\alpha}$; quindi l'integrale

$$\int_0^{1/4} f_\alpha(x)\, dx.$$

converge se e solo se $\alpha < 1$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Sviluppi di Mac Laurin.

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{a}{n} x^n + o(x^n) \qquad \forall n \geq 0$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \forall n \geq 0$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 13.02.2023

TEMA 2

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2(2\log|x| - 3)$$

(a) determinare il dominio di f, il segno di f ed eventuali simmetrie;

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La funzione f è pari e $f(x) = 0$ se e solo se $\log|x| = \frac{3}{2}$ quindi per $x = \pm e^{\frac{3}{2}}$. Inoltre $f(x) > 0$ se e solo se $\log|x| > \frac{3}{2}$ quindi per $x > e^{\frac{3}{2}}$ e $x < -e^{\frac{3}{2}}$.

(b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuità ed asintoti agli estremi del dominio;

Usando la sostituzione $y = \frac{1}{x}$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-2\log y - 3}{y^2} = 0$$

grazie la gerarchia degli infiniti. Dato che f è pari anche $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ quindi f è prolungabile con continuità in $x = 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

quindi f non ha asintoti orizzontali o obliqui a $\pm\infty$.

(c) studiare la derivabilità di f nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

La funzione f è derivabile nel suo dominio in quanto composizione e prodotto di funzioni derivabili, inoltre

$$f'(x) = 2x(2\log|x| - 3) + 2x = 4x(\log|x| - 1).$$

Vale

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-4\log|y| - 4}{y} = 0 \qquad \text{per la gerarchia degli infiniti, dove } y = \tfrac{1}{x};$$

inoltre f' è dispari in quanto f è pari, quindi anche

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0.$$

Abbiamo $f'(x) = 0$ se e solo se $\log|x| = 1$ quindi per $x = \pm e$. Se $x \in (0, +\infty)$ vale $f'(x) > 0$ quando $\log x > 1$ quindi per $x \in (e, +\infty)$. Visto che f' è dispari, avremo $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in (-e, 0) \cup (e, +\infty)$. In particolare f è strettamente crescente negli insiemi $[-e, 0)$ e $[e, +\infty)$ e strettamente decrescente negli

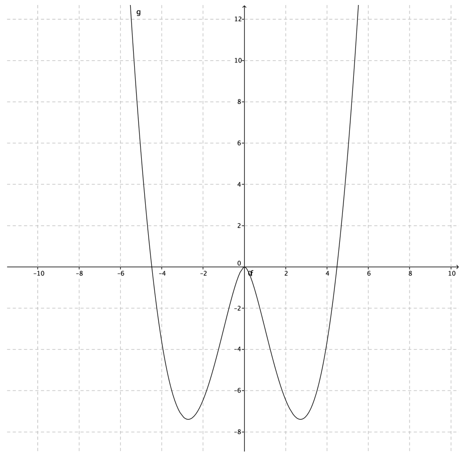

Figura 2: Grafico di f

insiemi $(-\infty, -e]$ e $(0, e]$. I punti $\pm e$ sono punti di minimo assoluto e la funzione assume il valore minimo $-e^2$, mentre $\sup f = +\infty$.

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Vedere Figura 2.

Esercizio 2 (8 punti) Trovare in $\mathbb{C}$ le soluzioni della seguente equazione ed esprimerle in forma algebrica:

$$\sqrt{3}z^2 - 2z + i = 0.$$

Le due soluzioni sono

$$z_1 = \frac{2 + w_1}{2\sqrt{3}}, \qquad z_2 = \frac{2 + w_2}{2\sqrt{3}},$$

dove w_1, w_2 sono le due radici quadrate in $\mathbb{C}$ di $b^2 - 4ac = 4 - 4\sqrt{3}i$. Le due radici w_1 e w_2 hanno modulo $\sqrt{|4 - 4\sqrt{3}i|} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ e argomenti $\frac{1}{2}\text{Arg}\left(4 - 4\sqrt{3}i\right) = -\frac{\pi}{6}$ e $\frac{1}{2}\text{Arg}\left(4 - 4\sqrt{3}i\right) + \pi = \frac{5\pi}{6}$. Quindi

$$w_1 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{6} - \sqrt{2}i \qquad \text{e} \qquad w_2 = -w_1 = -\sqrt{6} + \sqrt{2}i.$$

Dunque le soluzioni sono

$$z_1 = \frac{2 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}i, \qquad z_2 = \frac{2 - \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}i.$$

Esercizio 3 (8 punti) Data la successione

$$a_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{1}{n^a}\right)}\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-1/2} - 1 + \frac{1}{n}\right],$$

(a) determinare l'ordine di infinito o infinitesimo di $(a_n)_n$ per ogni $a > 0$;

(b) discutere il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per ogni $a > 0$.

(a)

$$a_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{1}{n^a}\right)}\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-1/2} - 1 + \frac{1}{n}\right] = \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} - 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^a} + o\left(\frac{1}{n^a}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^a} + o\left(\frac{1}{n^a}\right)} \sim \frac{3}{2n^{2-a}}$$

Pertanto se $0 < a < 2$ la successione ha ordine di infinitesimo $2-a$, se $a > 2$ ha ordine di infinito $a-2$, mentre se $a = 2$ non è né infinita né infinitesima.

(b) Per il punto (a), la successione (a_n) (a termini di segno positivo) è asintotica alla successione $\frac{1}{n^{2-a}}$, pertanto dal criterio del confronto asintotico $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2-a}}$ converge. Ciò accade se e solo se $2-a > 1$, i.e. $a < 1$.

Esercizio 4 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(9-x)x^\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 f_{1/2}(x)\, dx$$

(b) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 f_\alpha(x)\, dx.$$

(a)

$$\int_0^1 f_{1/2}(x)\, dx = \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \frac{1}{(9-x)x^{\frac{1}{2}}} dx \underset{y=x^{\frac{1}{2}}}{=} \lim_{c\to 0+} \int_{c^{1/2}}^1 \frac{2y}{(9-y^2)y} dy =$$

$$\lim_{c\to 0+} \int_{c^{1/2}}^1 \frac{2}{(9-y^2)} dy = \lim_{c\to 0+} \int_{c^{1/2}}^1 \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3+y} + \frac{1}{3-y}\right) dy$$

$$\lim_{c^{1/2}\to 0+} \frac{1}{3}\left(\log(1+3) - \log(3+c^{\frac{1}{2}}) - \log(3-1) + \log(3-c^{\frac{1}{2}})\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\log(4/3) - \frac{1}{3}\log(2/3) = \frac{1}{3}\log(2)$$

poiché

$$\frac{2}{(9-y^2)} = \frac{A}{(3+y)} + \frac{B}{(3-y)} = \frac{3(A+B) + 3(B-A)y}{(1-y^2)} \qquad \forall y \in \mathbb{R} \iff A = B = \frac{1}{3}$$

(b) Per $x \to 0$ si ha che $f_\alpha \sim \frac{1}{x^\alpha}$; quindi l'integrale

$$\int_0^1 f_\alpha(x)\, dx.$$

converge se e solo se $\alpha < 1$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Sviluppi di Mac Laurin.

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{a}{n} x^n + o(x^n) \qquad \forall n \geq 0$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \qquad \forall n \geq 0$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 13.02.2023

TEMA 3

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2(3\log|x| - 2)$$

(a) determinare il dominio di f, il segno di f ed eventuali simmetrie;

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La funzione f è pari e $f(x) = 0$ se e solo se $\log|x| = \frac{2}{3}$ quindi per $x = \pm e^{\frac{2}{3}}$. Inoltre $f(x) > 0$ se e solo se $\log|x| > \frac{2}{3}$ quindi per $x > e^{\frac{2}{3}}$ e $x < -e^{\frac{2}{3}}$.

(b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuità ed asintoti agli estremi del dominio;

Usando la sostituzione $y = \frac{1}{x}$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-3\log y - 2}{y^2} = 0$$

grazie la gerarchia degli infiniti. Dato che f è pari anche $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ quindi f è prolungabile con continuità in $x = 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

quindi f non ha asintoti orizzontali o obliqui a $\pm\infty$.

(c) studiare la derivabilità di f nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

La funzione f è derivabile nel suo dominio in quanto composizione e prodotto di funzioni derivabili, inoltre

$$f'(x) = 2x(3\log|x| - 2) + 3x = x(6\log|x| - 1).$$

Vale

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-6\log|y| - 1}{y} = 0 \qquad \text{per la gerarchia degli infiniti, dove } y = \tfrac{1}{x};$$

inoltre f' è dispari in quanto f è pari, quindi anche

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0.$$

Abbiamo $f'(x) = 0$ se e solo se $\log|x| = \frac{1}{6}$ quindi per $x = \pm e^{\frac{1}{6}}$. Se $x \in (0, +\infty)$ vale $f'(x) > 0$ quando $\log x > \frac{1}{6}$ quindi per $x \in (e^{\frac{1}{6}}, +\infty)$. Visto che f' è dispari, avremo $f'(x) > 0$ se e solo se

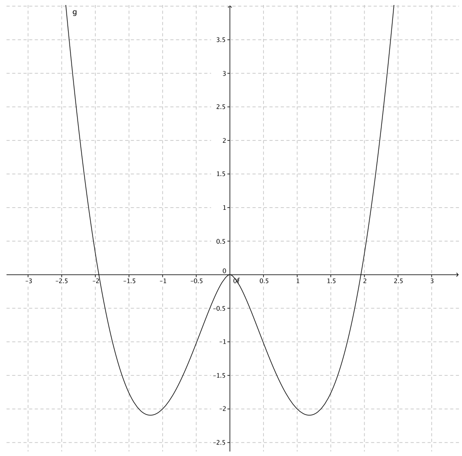

Figura 3: Grafico di f

$x \in (-e^{\frac{1}{6}}, 0) \cup (e^{\frac{1}{6}}, +\infty)$. In particolare f è strettamente crescente negli insiemi $[-e^{\frac{1}{6}}, 0)$ e $[e^{\frac{1}{6}}, +\infty)$ e strettamente decrescente negli insiemi $(-\infty, -e^{\frac{1}{6}}]$ e $(0, e^{\frac{1}{6}}]$. I punti $\pm e^{\frac{1}{6}}$ sono punti di minimo assoluto e la funzione assume il valore minimo $-\frac{3}{2}e^{\frac{1}{3}}$, mentre $\sup f = +\infty$.

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Vedere Figura 3.

Esercizio 2 (8 punti) Trovare in $\mathbb{C}$ le soluzioni della seguente equazione ed esprimerle in forma algebrica:

$$\sqrt{3}z^2 + 2z - i = 0.$$

Le due soluzioni sono

$$z_1 = \frac{-2 + w_1}{2\sqrt{3}}, \qquad z_2 = \frac{-2 + w_2}{2\sqrt{3}},$$

dove w_1, w_2 sono le due radici quadrate in $\mathbb{C}$ di $b^2 - 4ac = 4 + 4\sqrt{3}i$. Le due radici w_1 e w_2 hanno modulo $\sqrt{|4 + 4\sqrt{3}i|} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ e argomenti $\frac{1}{2}\text{Arg}\left(4 + 4\sqrt{3}i\right) = \frac{\pi}{6}$ e $\frac{1}{2}\text{Arg}\left(4 + 4\sqrt{3}i\right) + \pi = \frac{7\pi}{6}$. Quindi

$$w_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{6} + \sqrt{2}i \qquad \text{e} \qquad w_2 = -w_1 = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i.$$

Dunque le soluzioni sono

$$z_1 = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}i, \qquad z_2 = \frac{-2 - \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}i.$$

Esercizio 3 (8 punti) Data la successione

$$a_n = \frac{1}{\sinh\left(\frac{1}{n^a}\right)}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/3} - 1 + \frac{1}{3n}\right],$$

(a) determinare l'ordine di infinito o infinitesimo di $(a_n)_n$ per ogni $a > 0$;

(b) discutere il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per ogni $a > 0$.

(a)

$$a_n = \frac{1}{\sinh\left(\frac{1}{n^a}\right)}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1/3} - 1 + \frac{1}{3n}\right] = \frac{1-\frac{1}{3n}+\frac{2}{9n^2}-1+\frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^a}+o\left(\frac{1}{n^a}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{9n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^a}+o\left(\frac{1}{n^a}\right)} \sim \frac{2}{9n^{2-a}}$$

Pertanto se $0 < a < 2$ la successione ha ordine di infinitesimo $2-a$, se $a > 2$ ha ordine di infinito $a-2$, mentre se $a = 2$ non è né infinita né infinitesima.

(b) Per il punto (a), la successione (a_n) (a termini di segno positivo) è asintotica alla successione $\frac{1}{n^{2-a}}$, pertanto dal criterio del confronto asintotico $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2-a}}$ converge. Ciò accade se e solo se $2-a > 1$, i.e. $a < 1$.

Esercizio 4 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(4-x)x^\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 f_{1/2}(x)\,dx$$

(b) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx.$$

(a)

$$\int_0^1 f_{1/2}(x)\,dx = \lim_{c\to 0+}\int_c^1 \frac{1}{(4-x)x^{\frac{1}{2}}}dx \underset{y=x^{\frac{1}{2}}}{=} \lim_{c\to 0+}\int_{c^{1/2}}^1 \frac{2y}{(4-y^2)y}dy =$$

$$\lim_{c\to 0+}\int_{c^{1/2}}^1 \frac{2}{(4-y^2)}dy = \lim_{c\to 0+}\frac{1}{2}\int_{c^{1/2}}^1 \left(\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2-y}\right)dy =$$

$$= \lim_{c^{1/2}\to 0+}\frac{1}{2}\left(\log(1+2)-\log(2+c^{\frac{1}{2}})-\log(2-1)+\log(2-c^{\frac{1}{2}})\right) = \frac{1}{2}\log(3)$$

poiché

$$\frac{2}{(4-y^2)} = \frac{A}{(2+y)}+\frac{B}{(2-y)} = \frac{2(A+B)+2(B-A)y}{(4-y^2)} \qquad \forall y \in \mathbb{R} \iff A = B = \frac{1}{2}$$

(b) Per $x \to 0$ si ha che $f_\alpha \sim \frac{1}{x^\alpha}$; quindi l'integrale

$$\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx.$$

converge se e solo se $\alpha < 1$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Siluppi di Mac Laurin.

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \begin{pmatrix} a \\ n \end{pmatrix} x^n + o(x^n) \qquad \forall n \geq 0$$

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad \forall n \geq 0$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 13.02.2023

TEMA 4

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2(4\log|x| - 1)$$

(a) determinare il dominio di f, il segno di f ed eventuali simmetrie;

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La funzione f è pari e $f(x) = 0$ se e solo se $\log|x| = \frac{1}{4}$ quindi per $x = \pm e^{\frac{1}{4}}$. Inoltre $f(x) > 0$ se e solo se $\log|x| > \frac{1}{4}$ quindi per $x > e^{\frac{1}{4}}$ e $x < -e^{\frac{1}{4}}$.

(b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuità ed asintoti agli estremi del dominio;

Usando la sostituzione $y = \frac{1}{x}$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-4\log y - 1}{y^2} = 0$$

grazie la gerarchia degli infiniti. Dato che f è pari anche $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ quindi f è prolungabile con continuità in $x = 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

quindi f non ha asintoti orizzontali o obliqui a $\pm\infty$.

(c) studiare la derivabilità di f nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

La funzione f è derivabile nel suo dominio in quanto composizione e prodotto di funzioni derivabili, inoltre

$$f'(x) = 2x(4\log|x| - 1) + 4x = 2x(4\log|x| + 1).$$

Vale

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-8\log|y| + 2}{y} = 0 \qquad \text{per la gerarchia degli infiniti, dove } y = \tfrac{1}{x};$$

inoltre f' è dispari in quanto f è pari, quindi anche

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0.$$

Abbiamo $f'(x) = 0$ se e solo se $\log|x| = -\frac{1}{4}$ quindi per $x = \pm e^{-\frac{1}{4}}$. Se $x \in (0, +\infty)$ vale $f'(x) > 0$ quando $\log x > -\frac{1}{4}$ quindi per $x \in (e^{-\frac{1}{4}}, +\infty)$. Visto che f' è dispari, avremo $f'(x) > 0$ se e solo se

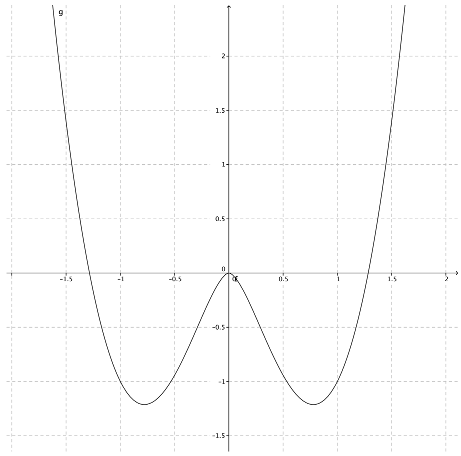

Figura 4: Grafico di f

$x \in (-e^{-\frac{1}{4}}, 0) \cup (e^{-\frac{1}{4}}, +\infty)$. In particolare f è strettamente crescente negli insiemi $[-e^{-\frac{1}{4}}, 0)$ e $[e^{-\frac{1}{4}}, +\infty)$ e strettamente decrescente negli insiemi $(-\infty, -e^{-\frac{1}{4}}]$ e $(0, e^{-\frac{1}{4}}]$. I punti $\pm e^{-\frac{1}{4}}$ sono punti di minimo assoluto e la funzione assume il valore minimo $-2e^{-\frac{1}{2}}$, mentre $\sup f = +\infty$.

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Vedere Figura 4.

Esercizio 2 (8 punti) Trovare in $\mathbb{C}$ le soluzioni della seguente equazione ed esprimerle in forma algebrica:

$$\sqrt{3}z^2 + 2z + i = 0.$$

Le due soluzioni sono

$$z_1 = \frac{-2 + w_1}{2\sqrt{3}}, \qquad z_2 = \frac{-2 + w_2}{2\sqrt{3}},$$

dove w_1, w_2 sono le due radici quadrate in $\mathbb{C}$ di $b^2 - 4ac = 4 - 4\sqrt{3}i$. Le due radici w_1 e w_2 hanno modulo $\sqrt{|4 - 4\sqrt{3}i|} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ e argomenti $\frac{1}{2}\text{Arg}\left(4 - 4\sqrt{3}i\right) = -\frac{\pi}{6}$ e $\frac{1}{2}\text{Arg}\left(4 - 4\sqrt{3}i\right) + \pi = \frac{5\pi}{6}$. Quindi

$$w_1 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{6} - \sqrt{2}i \qquad \text{e} \qquad w_2 = -w_1 = -\sqrt{6} + \sqrt{2}i.$$

Dunque le soluzioni sono

$$z_1 = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}i, \qquad z_2 = \frac{-2 - \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}i.$$

Esercizio 3 (8 punti) Data la successione

$$a_n = \frac{1}{\arctan\left(\frac{1}{n^a}\right)}\left[1 + \frac{1}{n} - \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{1/2}\right],$$

(a) determinare l'ordine di infinito o infinitesimo di $(a_n)_n$ per ogni $a > 0$;

(b) discutere il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per ogni $a > 0$.

(a)

$$a_n = \frac{1}{\arctan\left(\frac{1}{n^a}\right)}\left[1+\frac{1}{n}-\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/2}\right] = \frac{1+\frac{1}{n}-1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^a}+o\left(\frac{1}{n^a}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^a}+o\left(\frac{1}{n^a}\right)} \sim \frac{1}{2n^{2-a}}$$

Pertanto se $0 < a < 2$ la successione ha ordine di infinitesimo $2-a$, se $a > 2$ ha ordine di infinito $a-2$, mentre se $a = 2$ non è né infinita né infinitesima.

(b) Per il punto (a), la successione (a_n) (a termini di segno positivo) è asintotica alla successione $\frac{1}{n^{2-a}}$, pertanto dal criterio del confronto asintotico $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2-a}}$ converge. Ciò accade se e solo se $2-a > 1$, i.e. $a < 1$.

Esercizio 4 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(16-x)x^\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 f_{1/2}(x)\,dx$$

(b) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx.$$

(a)

$$\int_0^1 f_{1/2}(x)\,dx = \lim_{c\to 0+}\int_c^1 \frac{1}{(16-x)x^{\frac{1}{2}}}dx \underset{y=x^{\frac{1}{2}}}{=} \lim_{c\to 0+}\int_{c^{1/2}}^1 \frac{2y}{(4-y^2)y}dy =$$

$$\lim_{c\to 0+}\int_{c^{1/2}}^1 \frac{2}{(16-y^2)}dy = \lim_{c\to 0+}\frac{1}{4}\int_{c^{1/2}}^1 \left(\frac{1}{4+y}+\frac{1}{4-y}\right)dy$$

$$\lim_{c^{1/2}\to 0+}\frac{1}{4}\left(\log(1+4)-\log(4+c^{\frac{1}{2}})-\log(4-1)+\log(4-c^{\frac{1}{2}})\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\log(5/4) - \frac{1}{4}\log(3/4) = \frac{1}{4}\log(5/3)$$

poiché

$$\frac{2}{(16-y^2)} = \frac{A}{(4+y)}+\frac{B}{(4-y)} = \frac{4(A+B)+4(B-A)y}{(4-y^2)} \qquad \forall y \in \mathbb{R} \iff A = B = \frac{1}{4}$$

(b) Per $x \to 0$ si ha che $f_\alpha \sim \frac{1}{x^\alpha}$; quindi l'integrale

$$\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx.$$

converge se e solo se $\alpha < 1$

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Sviluppo di Mac Laurin.

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \left(\begin{array}{c} a \\ n \end{array} \right) x^n + o(x^n) \qquad \forall n \geq 0$$

$$\arctan(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad \forall n \geq 0$$