

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 30.06.2023

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$$

- (a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie
- (b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
- (c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
- (d) calcolare la derivata seconda, determinare gli intervalli di concavità/convessità di f ed eventuali punti di flesso;
- (e) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f .

Esercizio 2 (punti 8) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$z^6 + 2iz^3 - 1 = 0.$$

Determinarne le soluzioni, le corrispondenti molteplicità e disegnarle nel piano complesso.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare il comportamento della seguente serie al variare di $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \left(1 - \sqrt{\frac{n^2}{n^2 + 1}}\right)^{\alpha-1}.$$

Esercizio 4 (punti 8)

(a) Usando il teorema di De L'Hôpital, dimostrare

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x+1) - \arctan(x)}{\frac{1}{x^2}} = 1;$$

(b) Usando la proprietà del punto precedente, discutere il comportamento del seguente integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha [\arctan(x+1) - \arctan(x)]} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tempo: due ore e mezza (comprehensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.