ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 30.06.2023

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}}$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La funzione non presenta simmetrie ed è positiva se e solo se $x > 0$, negativa altrimenti.

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

Si ha, usando la gerarchia degli infiniti/infinitesimi, e la sostituzione $y = 1/x$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y} e^y = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Per $x \to +\infty$ si ha un asintoto obliquo di equazione $y = x + 1$. Infatti

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{y\to 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

Similmente, si vede che per $x \to -\infty$ si ha l'asintoto obliquo $y = x + 1$.

(c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

La funzione è derivabile nel suo dominio in quanto prodotto di funzioni derivabili. Si ha

$$f'(x) = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$$

e quindi $f' > 0$ in $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ (dunque f è crescente in tale intervallo) e $f' < 0$ in $(0, 1)$ (pertanto f è decrescente in tale intervallo). L'estremo $x = 1$ è un punto di minimo locale, $\inf f = -\infty$ e $\sup f = +\infty$.

(d) calcolare la derivata seconda, determinare gli intervalli di concavità/convessità di f ed eventuali punti di flesso;

Si ha

$$f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}.$$

Quindi $f'' > 0$ per $x > 0$ (quindi f è convessa per $x > 0$), $f'' < 0$ (dunque concava) per $x < 0$.
(e) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

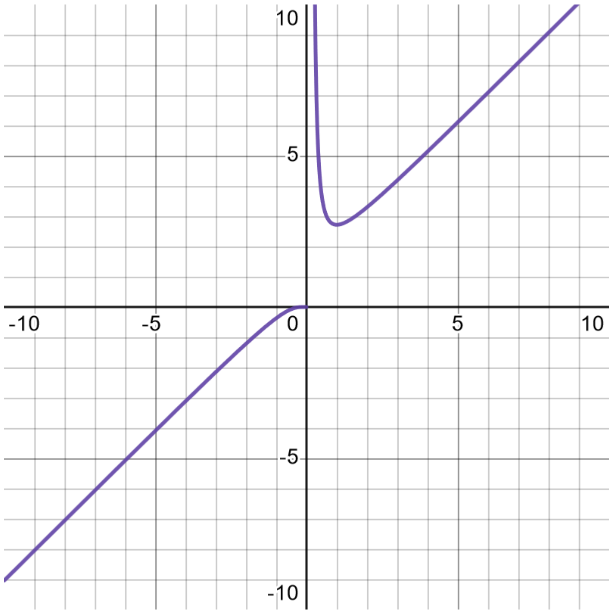

Figure 1: Grafico di f

Esercizio 2 (punti 8) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$z^6 + 2iz^3 - 1 = 0.$$

Determinarne le soluzioni, le corrispondenti molteplicità e disegnarle nel piano complesso.
Posto

$$w = z^3$$

si ottiene l'equazione

$$w^2 + 2iw - 1 = (w + i)^2 = 0.$$

Dunque si ottiene $w = -i = e^{i\frac{3}{2}\pi}$ con molteplicità 2, da cui, utilizzando la formula per il calcolo delle radici cubiche di un numero complesso, vale

$$z_1 = e^{i\pi/2} = i,$$

$$z_2 = e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi)} = e^{i\frac{7\pi}{6}} = ie^{\frac{2}{3}\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$$

$$z_3 = e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\pi)} = e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$$

ognuna con molteplicità pari a 2. Si veda la Figura 2 per la rappresentazione delle soluzioni nel piano complesso.
Esercizio 3 (punti 8) Studiare il comportamento della seguente serie al variare di $\alpha > 0$

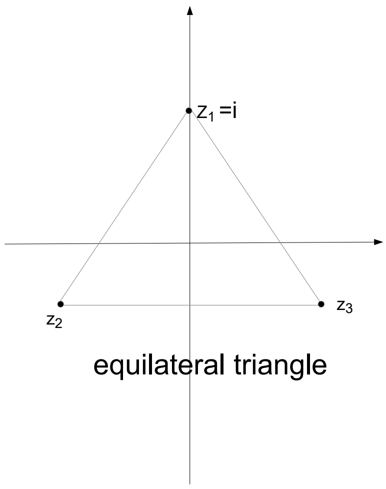

Figure 2: Soluzioni dell'equazione $z^6 + 2iz^3 - 1 = 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \left(1 - \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}}\right)^{\alpha-1}.$$

Detto

$$b_n = 1 - \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}}$$

si osservi che b_n è a termini positivi, e si ha

$$b_n = 1 - \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n^2+1}} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} \sim \frac{1}{2n^2},\ n \to \infty.$$

Pertanto

$$n^\alpha b_n^{\alpha-1} \sim \frac{1}{n^{\alpha-2}},\ n \to \infty.$$

La condizione necessaria di convergenza è soddisfatta solo se $\alpha > 2$ e la serie iniziale converge se $\alpha - 2 > 1$, cioè $\alpha > 3$, per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata.

Esercizio 4 (punti 8)

(a) Usando il teorema di De L'Hôpital, dimostrare

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan(x+1) - \arctan(x)}{\frac{1}{x^2}} = 1;$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Utilizzando il suggerimento nel testo dell'esercizio, essendo soddisfatte le ipotesi del teorema di De L'Hôpital, si ha (denotando con f e g il numeratore e il denominatore del precedente rapporto rispettivamente)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2x-1}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x\left(1 - \frac{1}{2x}\right)}{x^4\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \cdot \frac{x^3}{2} = 1$$

(b) Usando la proprietà del punto precedente, discutere il comportamento del seguente integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}\left[\arctan(x+1)-\arctan(x)\right]}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Utilizzando il risultato al punto (a), notando che la funzione integranda è non negativa, si ha

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha-2}},\ x \to +\infty.$$

Per il criterio del confronto asintotico per gli integrali generalizzati di funzioni non negative, si ha $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha-2}}\,dx < \infty$ se e solo se $\alpha - 2 > 1$, dunque per $\alpha > 3$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.