ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 11.09.2023

TEMA 1 (svolgimento)

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{(-4+x\log x)}$$

(a) determinarne il dominio di f ed eventuali simmetrie;

(b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuità ed asintoti agli estremi del dominio;

(c) calcolare la derivata di f, discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Soluzione

Il dominio di f è l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, la funzione non è né pari né dispari (ed è sempre positiva). Si osserva che per la gerarchia degli infinitesimi vale $\lim_{x\to 0} x\log x = 0$; pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^{-4} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

In $x = 0$ la funzione può essere prolungata per continuità definendo la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x > 0 \\ e^{-4} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si osserva immediatamente che la funzione ha crescita super-lineare (si ha $\frac{f(x)}{x} \to +\infty$ per $x \to +\infty$) e non presenta asintoti obliqui. Si ha inoltre

$$f'(x) = e^{(-4+x\log x)}(\log x + 1).$$

Dunque la funzione presenta un punto di minimo in $x = e^{-1}$, è decrescente per $x \in (0, e^{-1})$, mentre è crescente per $x > e^{-1}$. Si ha inoltre $\inf_{\{x>0\}} f = e^{-4-e^{-1}}$ e $\sup_{\{x>0\}} f = +\infty$. (Non richiesto: si verifica $f''(x) = e^{(-4+x\log x)}[(\log x + 1)^2 + 1/x]$. Pertanto $f'' > 0$ nel dom(f), quindi f è convessa.)

Esercizio 2 (punti 8) Trovare in $\mathbb{C}$ le soluzioni della seguente equazione ed esprimerle in forma algebrica

$$\frac{1}{z} = \frac{2\overline{z} + 1 + i\,\mathcal{I}m(z)}{|z|^2}.$$

Soluzione.

Campo di esistenza: $z \neq 0$.

Denotando $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, valgono:

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, \qquad \overline{z} = x - iy, \qquad \mathcal{I}m(z) = y, \qquad |z|^2 = x^2 + y^2$$

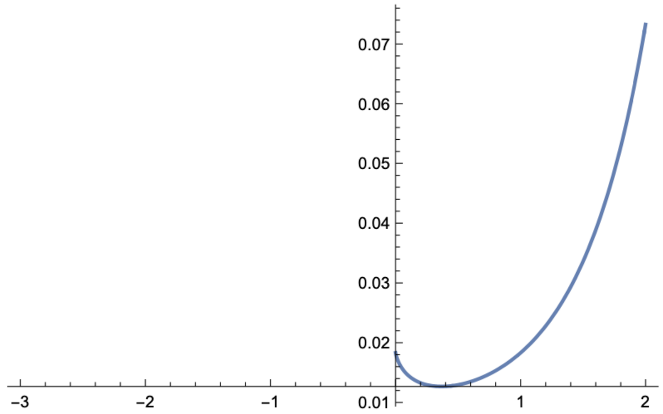

Figure 1: Grafico di f

Sostituendo le precedenti relazioni nell'equaizione otteniamo

$$x - iy = 2x - iy = 2x - 2iy + 1 + iy.$$

Da cui

$$x = -1.$$

Le soluzioni sono $\{z \in \mathbb{C}; z = -1 + iy, \quad y \in \mathbb{R}\}$.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\arctan(1/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}.$$

Soluzione.

La serie proposta è a termini di segno alterno. Per la convergenza assoluta, si osserva che la serie dei valori assoluti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(1/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$$

è divergente. Infatti, nonostante la condizione necessaria di convergenza sia soddisfatta, cioè

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(1/\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(1/\sqrt{n})}{1/\sqrt{n}} \frac{1}{n} = 0,$$

usando il criterio del confronto asintotico e gli sviluppi di MacLaurin, si ottiene che la serie dei valori assoluti presenta lo stesso carattere della serie armonica, che è divergente.

Per quanto riguarda la convergenza semplice, possiamo applicare il criterio di Leibniz in quanto la successione $a_n = \frac{\arctan(1/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ (a termini non negativi) converge decrescendo a 0 definitivamente. La decrescenza di a_n può essere dimostrata in due modi alternativi.

1° modo. Osserviamo che $n \mapsto \sqrt{n}$ è crescente. Pertanto $n \mapsto 1/\sqrt{n}$ è decrescente. Inoltre, poiché la funzione $x \mapsto \arctan(x)$ è crescente su $[0, \infty)$, la successione $n \mapsto \arctan(1/\sqrt{n})$ è decrescente. La successione a_n può essere scritta come

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \arctan(1/\sqrt{n})$$

cioè come prodotto di due successioni decrescenti e positive; è decrescente.

2º modo. Analizziamo il comportamento della funzione $f(x) = \frac{\arctan(1/\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ per $x \to +\infty$. Osserviamo che la sua derivata è

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}\left(-\frac{1}{2x^{3/2}}\right)\sqrt{x} - \arctan(1/\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x};$$

per $x > 0$, il numeratore è somma di due termini negativi quindi f è decrescente.

Esercizio 4 (punti 8)

(a) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx.$$

(b) Studiare il comportamento del seguente integrale al variare di $\alpha > 0$

$$\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos\left(\sqrt{x}\right)}{x^{\alpha}}\, dx.$$

Soluzione.

(a) Per calcolare l'integrale si può procedere con la sostituzione $t = \sqrt{x}$ e ottenere

$$\int \cos(\sqrt{x})\, dx = \int 2t \cos t\, dt.$$

Integrando per parti e utilizzando l'identità $t = \sqrt{x}$ si ha

$$\int 2t \cos t\, dt = 2t \sin t - 2 \int \sin t\, dt = 2t \sin t + 2 \cos t + c = 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + c.$$

(b) Innanzitutto notiamo che in $[0, \pi]$ la funzione integranda è non negativa, pertanto possiamo utilizzare i criteri per gli integrali impropri di funzioni non negative. Si nota che la funzione integranda è $C((0, \pi])$ quindi presenta un problema di integrazione in $x = 0$, essendo $\alpha > 0$. Utilizzando gli sviluppi di Mac Laurin e il criterio del confronto asintotico si nota che

$$\frac{1 - \cos\left(\sqrt{x}\right)}{x^{\alpha}} \sim \frac{1}{x^{\alpha - 1}} \text{ per } x \to 0^+.$$

Si ottiene dunque che l'integrale converge se e solo se $\alpha - 1 < 1$, cioè $\alpha \in (0, 2)$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria).